В. Н. Гордеев

КВАТЕРНИОНЫ И БИКВАТЕРНИОНЫ

с приложениями

В ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ

Издательство «Сталь»
Киев – 2016

УДК 512.623.282.2:[514.123+531.1]:624.014.07
ББК 22.14+22.15+38.1
Г 68

Рецензент: доктор технических наук *А. В. Перельмутер*

Гордеев В. Н.

Г 68 Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике / В. Н. Гордеев. – Киев: Издательство "Сталь", 2016. – 316 с.

ISBN 978-617-676-099-3

В этой книге описан математический аппарат, позволяющий оцифровывать перемещения твердых тел в трехмерном пространстве и на этой основе решать задачи формообразования и механического расчета криволинейных пространственных конструкций. Объектами описанного математического аппарата являются кватернионы и бикватернионы, по ряду причин не нашедшие достойного применения при решении технических задач. Это отчасти объясняется тем, что кватернионы и бикватернионы не изучаются в технических вузах и трактуются как гиперкомплексные числа, не понятные инженеру.

Автор попытался в этой книге изложить материал языком, привычным для инженера, даже не упоминая о гиперкомплексных числах. Книга построена как расширенное справочное пособие по векторам, винтам, кватернионам и бикватернионам. Полные доказательства приведенных утверждений в ней опущены, а даются лишь пояснения, необходимые для понимания. Приводятся примеры применения кватернионов и бикватенионов в кинематике твердого тела, сферической геометрии, механике гибких валов, расчете изделий из первоначально изогнутой проволоки, в формообразовании криволинейных стержней.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников, желающих по-новому подойти к формообразованию и расчету пространственных конструкций со сложной геометрией, а также для специалистов, занимающихся программированием трехмерной графики и компьютерной анимации.

УДК 512.623.282.2:[514.123+531.1]:624.014.07
ББК 22.14+22.15+38.1

ISBN 978-617-676-099-3

© В. Н. Гордеев, 2016
© Издательство "СТАЛЬ", 2016

Господь Бог изощрен, но не злонамерен.

Альберт Эйнштейн

Оглавление

Предисловие ... 7
1. Векторы ... 14
1.1. Основные понятия ... 14
1.2. Операции над векторами ... 15
1.3. Использование объекта Леви-Чивиты ... 17
1.4. Векторное представление ориентации твердого тела ... 18
1.5. Кинематические уравнения ... 28
2. Кватернионы ... 34
2.1. Основные понятия ... 36
2.2. Операции над кватернионами ... 37
2.3. Представление кватернионов матрицами ... 42
2.4. Кватернионные функции ... 44
2.5. Дифференцирование кватернионных функций ... 46
2.6. Кватернионные функции вещественной переменной ... 52
2.7. Представление нормированных кватернионов на поверхности сферы ... 62
2.8. Кватернионное представление ориентации твердого тела ... 74
2.9. Связь с другими методами представления ориентации тела ... 79
2.10. Кинематические уравнения ... 84
2.11. Интерполяция кватернионов ... 95
3. Винты ... 106
3.1. Дуальные числа ... 106
3.2. Скользящие векторы ... 109
3.3. Основные сведения о винтах ... 112
3.4. Операции над винтами ... 117
3.5. Винты в косоугольной дуальной системе координат ... 122
3.6. Винтовое представление положения твердого тела ... 131
4. Бикватернионы ... 137
4.1. Основные понятия ... 137
4.2. Операции над бикватернионами ... 139
4.3. Аналитические функции бикватерниона ... 143
4.4. Разложение бикватерниона по заданной оси ... 147

4.5. Производные дуальных функций бикватерниона 147
4.6. Определение производного бикватерниона по моментной части 148
4.7. Бикватернионное представление положения твердого тела 149
4.8. Кинематические уравнения 158
4.9. Использование бикватернионов общего вида 160
5. Сферическая геометрия 164
5.1. Системы координат 164
5.2. Формулы перехода от одной системы координат к другой 165
5.3. Расстояния между точками на сфере 166
5.4. Углы между большими окружностями на сфере 167
5.5. Контуры на сфере 170
5.6. Длина контура и площадь поверхности сферы, ограниченная контуром 171
5.7. Круговые контуры 173
5.8. Полигоны на сфере 176
5.9. Замыкание полигона на сфере 178
5.10. Правильный многоугольник на сфере 183
5.11. Соотношение углов в сферическом треугольнике 187
5.12. Разгонка невязок 191
6. Механика гибких валов 195
6.1. Использование всех компонентов кватернионов и бикватернионов 195
6.2. Описание модели гибкого вала 196
6.3. Бикватернионы исходного и деформированного состояния гибкого вала 197
6.4. Наращивание гибкого вала как сложение перемещений 200
6.5. Скорость движения твердого тела и локальная форма гибкого вала 201
6.6. Бикватернион перемещений 203
6.7. Бикватернион деформаций 205
6.8. Геометрические уравнения 207
6.9. Бикватернион внутренних усилий 209
6.10. Статические уравнения 210
6.11. Физические уравнения 214
6.12. Краевая задача 214
7. Механика упругой проволоки 217
7.1. Постановка задачи 217
7.2. Размеры и координаты 218
7.3. Бикватернионное представление формы проволоки 218
7.4. Исходная естественная форма проволоки 220
7.5. Бикватернион перемещений 224

7.6. Бикватернион деформаций ... 225
7.7. Геометрические уравнения ... 226
7.8. Бикватернион внутренних усилий ... 228
7.9. Статические уравнения ... 229
7.10. Физические уравнения ... 230
7.11. Некоторые предварительные итоги ... 231
7.12. Метод усилий ... 233
7.13. Метод перемещений ... 234
7.14. Задача оптимального управления и принцип максимума Понтрягина ... 235
7.15. Условия трансверсальности при линейных ограничениях ... 238
7.16. Принцип максимума Понтрягина для бикватерниона перемещений ... 244
7.17. Принцип максимума Понтрягина для собственного бикватерниона ... 249
7.18. Принцип максимума Понтрягина для других кватернионов ... 253
7.19. Обычные краевые условия ... 256
7.20. Проволока, пропущенная сквозь втулку ... 259
8. Формообразование криволинейных стержней ... 263
8.1. Геометрия криволинейного стержня ... 263
8.2. Самолетная аналогия ... 263
8.3. Решение задачи о движении самолета ... 265
8.4. Зависимости для координатной системы, связанной с пропеллером ... 267
8.5. Формообразование криволинейного стержня ... 268
8.6. Кривизна и кручение оси стержня ... 270
8.7. Примитивы ... 272
8.8. Стержни с осью периодической формы ... 277
8.9. Стержни с осью, лежащей на поверхности сферы ... 277
8.10. Стержни экзотической формы ... 278
8.11. Тонкостенные стержни из листовых заготовок ... 278
Послесловие ... 293
9. Приложения ... 297
9.1. Аналитические функции кватернионного аргумента ... 297
9.2. Дифференциалы для некоторых аналитических функций ... 299
9.3. Кватернионы элементарных поворотов ... 301
9.4. Аналитические функции дуального аргумента ... 306
9.5. Аналитические функции бикватернионного аргумента ... 307
Литература ... 311

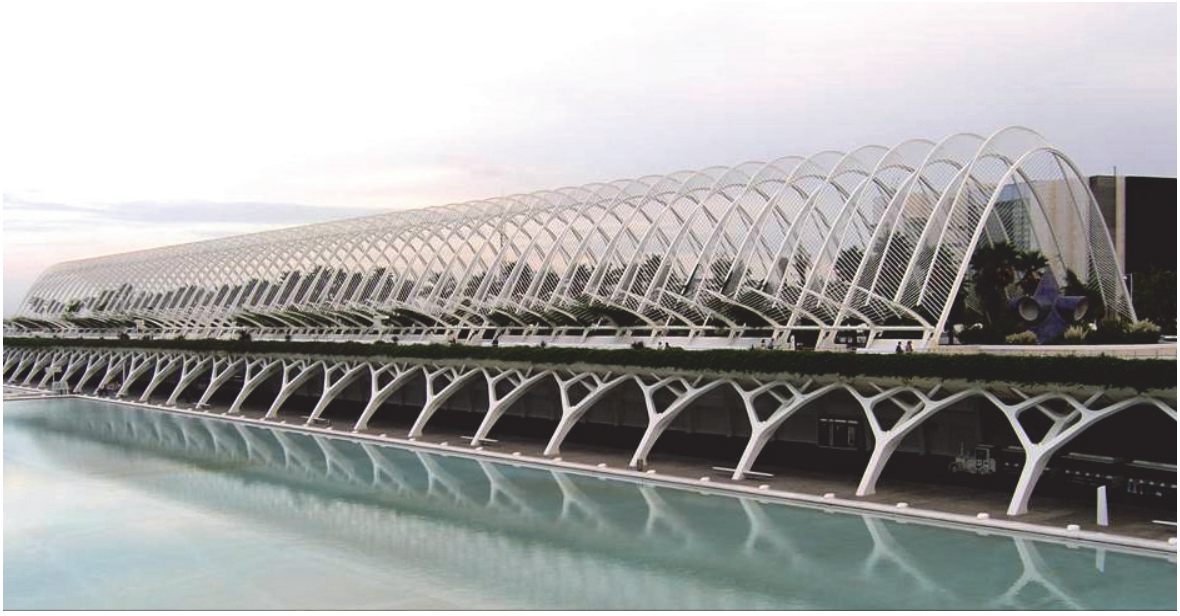
Предисловие

В последнее время в архитектуре стало модным направление, использующее криволинейные формы. Мы видим на чертежах и в натуре застывшие водопады, причудливые потоки жидкости, оболочки, копирующие живые организмы: моллюски, раковины, парящую птицу, видим и осязаем стальную стержневую структуру покрытия стадиона в Пекине, имеющую форму птичьего гнезда.



С. Калатрава. Город искусств и наук. Музей наук принца Филиппа

Лучшие архитекторы современности пользовались в своей работе идеей криволинейности. В связи с этим непременно надо упомянуть имя знаменитого испанского архитектора Сантьяго Калатравы, создавшего на своей родине в городе Валенсия комплекс сооружений, названный Городом искусств и наук, напоминающих то летящую птицу, то раковину, то глаз человека. По его проектам во многих странах мира построены криволинейные мосты и иные необычные сооружения.



С. Калатрава. Город искусств и наук. Оранжерея



С. Калатрава. Мост мира. Калгари

Этому же направлению принадлежат работы Захи Хадид (1950–2016) – женщины-архитектора арабского происхождения, ставшей одним из главных героев современной архитектуры. Она сумела превратить направление «деконструктивизма» в общепризнанное актуальное течение мировой архитектуры. Заха Хадид отрицала прямые линии и предпочитала криволинейные мотивы. Она преуспела в создании и

больших стадионов, и центров современного искусства, и жилых городских районов. Среди ее последних работ опера в Гуанчжоу, центр Гейдара Алиева в г. Баку, Лондонский центр водных видов спорта.



Заха Хадид. Центр Гейдара Алиева

Отдельный класс элементов строительных конструкций составляют криволинейные стержни. Иногда все сооружение имеет вид криволинейного стержня. Такова скульптура столетия Ауди, построенная по проекту архитектора Джерри Юда в Западном Суссексе, таков проект обзорной башни в г. Инчеон (Южная Корея), предложенный архитектором Франсуа Бланчаком.



Джерри Юд. Скульптура столетия Ауди, Западный Суссекс



Франсуа Бланчак. Обзорная башня. Проект. Инчеон. Южная Корея



Большой арочный мост в Дубае (проект)

Идея создания в Дубае большого арочного моста нашла воплощение в конструкции, где основным несущим элементом является замкнутый криволинейный стержень.



Олимпийский стадион в Пекине

Инженерам-строителям, к числу которых я принадлежу, приходится воплощать в материале идеи архитекторов. В 2006 году мне удалось профессионально познакомиться со строительством Олимпийского стадиона в г. Пекине. Несущие конструкции этого стадиона представляют пространственную систему криволинейных металлических стержней коробчатого поперечного сечения. Эти стержни были изготовлены по кускам на заводе, а потом привезены на стройку и состыкованы. Все сошлось с миллиметровой точностью. Я был поражен тем, что удалось сделать китайцам, и долго размышлял, как подойти к решению подобной технической задачи и какой математический аппарат нужно применить. Мне показалось, что для этой цели подойдет математический аппарат кватернионов и бикватернионов.

Известно, что основное приложение кватернионов находится в области кинематики и динамики твердого тела, ориентации космических объектов и компьютерной анимации. Тем более интересным показался путь использования кватернионов не по прямому назначению.

В технических вузах кватернионы и бикватернионы не изучают. Стоило большого труда разобраться в этих четырех- и восьмикомпонентных объектах, которые в литературе повсеместно представлены как гиперкомплексные и дуальные числа с одной действительной и тремя специфическими мнимыми единицами. По своему опыту знаю, что инженеру более близки объекты линейной алгебры, и поэтому будет более понятным представлять кватернион и бикватернион не как гиперкомплексное число, а как четырехмерный вектор с действительными или дуальными компонентами, отрешившись от кватернионных мнимостей. Я решил составить для себя справочное пособие по математике, где кватернионы и бикватернионы – это исключительно четырехмерные векторы и в котором нет даже упоминания о гиперкомплексных числах. Так получилось, что составление небольшого (по замыслу) пособия потребовало большого труда. Оно стало обрастать дополнительным материалом и достигло размеров книги. Я подумал, что пособие может быть полезно не только мне и его надо опубликовать. Эту книгу Вы держите в руках. В ней нет строгих доказательств, поскольку нет принципиально новых результатов. Однако, в этой книге кватернионы и бикватернионы представлены совсем не так, как они описаны в классической литературе, а так, как я их переосмыслил, пытаясь применить для решения близких мне задач. Боюсь, что кватернионщики придут в ужас, ознакомившись с пособием, и подвергнут меня жестокой критике.

В книге большое внимание уделено аналитическим функциям кватернионов и бикватернионов. Эти функции позволяют в компактном виде записать многие практически важные формулы. Именно благодаря экспоненциальной и логарифмической функциям удалось принять за основу и провести через всю книгу естественное понятие истинного эйлерова поворота, избегаемое многими авторами из-за сложности получающихся формул. Даже сложение истинных эйлеровых поворотов весьма компактно записывается с использованием аналитических функций кватерниона.

Но не только кватернионы и бикватернионы описаны здесь. Бикватернион нельзя описать, не базируясь на понятии винта. Винт нельзя описать, не базируясь на понятии скользящего вектора. Поэтому скользящие векторы и винты, – несколько необычные объекты, – также представлены в этом справочном пособии. Несмотря на то, что свободный вектор – объект общеизвестный, он тоже попал в пособие. Так же, как бикватернион есть расширенное представление винта, кватернион есть расширенное представление свободного вектора. Отказавшись от описания свободного вектора, нельзя было бы сформулировать принцип перенесения Котельникова-Штуди, являющийся мостом между свободными векторами и винтами, между кватернионами и бикватернионами. И, наконец, в справочнике присутствует еще один странный, но очень важный объект – дуальные числа Клиффорда. Именно эти числа позволили превратить свободный вектор в винт, а кватернион – в бикватернион.

Разбираясь с решаемой проблемой по книгам, я заметил, что их авторы погружаются в математику, а физический смысл математических объектов оставляют открытым,

надеясь, что читатель сам догадается, как его установить. Это сделать не так просто. Особенно я измучился, когда переходил от кватернионов к бикватернионам. Поэтому счел полезным в справочном пособии представить не только математику, но и наиболее характерные ее приложения. Сферическая геометрия является одним из таких приложений. Для ее описания очень подходят кватернионы. Самым естественным прикладным объектом из области механики является абсолютно твердое тело, перемещающееся в трехмерном пространстве. Для этого объекта кватернионы и бикватернионы приспособлены более всего. Если абсолютно твердое тело имеет неподвижную точку, то это кватернионы, а если это тело может свободно перемещаться в пространстве, то бикватернионы.

Еще одним интересным геометрическим прикладным объектом является стержень с криволинейной осью. Поперечные сечения такого стержня можно отождествить с положениями абсолютно твердого плоского тела, движущегося в пространстве по криволинейной траектории, оставаясь перпендикулярным направлению движения, и на этой основе привлечь к анализу такого стержня кватернионы. При решении задачи о формообразовании криволинейного стержня представилась наглядной и полезной самолетная аналогия. Моделирующий самолет должен быть не реактивным, а винтовым с одним пропеллером, вращающимся вокруг оси, совпадающей с осью самолета. Пропеллер должен иметь форму поперечного сечения стержня. Представьте себе, что этот самолет летит по криволинейной траектории, а его странный пропеллер вращается не очень быстро. Аналогия состоит в том, что траектория самолета – это ось криволинейного стержня, а пропеллер в процессе полета ометает в пространстве трехмерное тело стержня, являясь в каждый момент времени его поперечным сечением. Дуговая координата поперечного сечения криволинейного стержня аналогична времени.

В этой прикладной задаче содержится одно новое качество. Дело в том, что кватернион состоит из четырех чисел, а описывает объекты с тремя степенями свободы. Четвертое число как бы является лишним. Недаром кватернион, представляющий трехмерный вектор, либо имеет нулевой компонент, либо сумма квадратов компонентов этого кватерниона равна единице. Самолет вместе с попеллером (в смысле ориентации) является объектом с четырьмя степенями свободы: три угла поворота самолета и угол поворота пропеллера. В самолетной аналогии удалось так сопоставить эти углы и компоненты кватерниона, что ориентация самолета и поворот пропеллера описывается одним кватернионом. При этом избыточная информационная емкость кватерниона получилась исчерпанной полностью.

Интересным приложением является механика устройств, предназначенных для передачи на разные расстояния под разными углами продольной силы и крутящего момента, которые состоят из сердечника и обоймы (гибкие валы). Примерами таких устройств являются гибкие тяги для рычагов управления автомобилем, вал для глубинного вибратора бетона, бурильное устройство с обсадной трубой. Оказалось, что деформированное состояние гибкого вала может быть описано одной бикватернионной функцией, каждое значение которой содержит информацию о его поперечном сечении – объекте с восемью степенями свободы, коими являются три пространственные координаты центра сечения, три угла ориентации сечения, продоль-

ное перемещение и угол поворота сердечника относительно обоймы. Бикватернионы как бы созданы для описания гибких валов. Информационная емкость бикватернионов в этом приложении используется полностью.

В книге рассмотрена задача о равновесных формах тонкой проволоки. Особенностью постановки этой задачи является то, что в исходном состоянии проволока не обязана быть прямолинейной. Таким образом, продемонстрирован подход к расчету изделий, получаемых из отрезка тонкой проволоки путем ее изгибания и скручивания.

Как частный случай рассматривается задача о равновесных формах первоначально прямолинейной проволоки. Интересным является тот факт, что эта задача эквивалентна хорошо исследованной классической задаче о вращении волчка. Поэтому результаты, полученные для вполне интегрируемых волчков Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, могут быть перенесены на задачу о равновесных формах первоначально прямолинейной проволоки.

Несмотря на то, что в книге не приведены приложения в области трехмерной графики, компьютерных игр и компьютерной анимации, представляется, что книга будет полезна и здесь, поскольку новый взгляд на привычный в этой области математический инструментарий может породить новые классы задач и привлечь внимание новых специалистов.

До сих пор необъяснимым является тот факт, что применение катернионов и бикватернионов при решении теоретических и прикладных задач не принесло заметных новых результатов. Ведь кватернионы и бикватернионы позволяют оперировать целой группой чисел, как единым объектом, а геометрический и механический смысл компонентов кватерниона и бикватерниона настолько удачен, что формулы получаются компактными и рациональными. Четвертый (нулевой) компонент кватерниона, во многих случаях кажущийся лишним, имеет физический смысл, дополняет информацию, содержащуюся в трех основных компонентах и пригоден к рациональному применению. Общеизвестно, что вычислительный процесс с использованием кватернионов исключает вырождение, наблюдающееся при пользовании углами Эйлера (так называемый "шарнирный замок"). Количество арифметических операций при вычислениях с использованием кватернионов, как правило, меньше, чем в других методах, причем преобладают операции сложения и умножения, а не операции вычисления трансцендентных функций.

Причина отсутствия новых результатов, по-видимому, заключается в том, что людей, разбирающихся в кватернионах и бикватернионах, очень мало. Эти объекты плохо воспринимаются интуитивно, и неподготовленному человеку трудно мыслить такими категориями. Может быть, эта книга позволит большему числу людей проникнуть в сущность кватернионов и бикватернионов и решить с их помощью новые задачи.

В связи с этим уместно вспомнить изречение Альберта Эйнштейна, высеченное на камине в Институте математики и теоретической физики Принстонского университета : "Господь Бог изощрен, но не злонамерен", выбранное в качестве эпиграфа к этой книге.

1. Векторы

Понятие вектора известно всем, поскольку векторы изучаются в общеобразовательной школе. Зачатки векторного исчисления появились вместе с геометрической моделью комплексных чисел. Одним из первооткрывателей векторов был швейцарский математик-любитель Жан-Робер Арган (Jean-Robert Argand), давший в 1806 году геометрическое описание комплексных чисел. Одним из основателей теории векторов считают немецкого математика Августа Фердинанда Мебиуса (August Ferdinand Möbius), который использовал двухмерные векторы. Векторы трехмерного пространства рассматривал Гаусс (1831).

Развитые операции с векторами опубликовал Гамильтон в 1845 году как часть своего кватернионного исчисления (вектор образовывали мнимые компоненты кватерниона). Гамильтон предложил сам термин "вектор" (лат. "vector", несущий). Он же определил скалярное и векторное произведения векторов (1853). Этот формализм использовал Максвелл в своих трудах по электромагнетизму, тем самым обратив внимание ученых на новое исчисление. Вскоре Гиббс опубликовал свой труд «Элементы векторного анализа» (1880-е годы), а затем Хевисайд (1903) придал векторному анализу современный вид.

1.1. Основные понятия

Вектор – это математическая модель объекта, имеющего величину и направление. Важнейшим свойством этой модели является то, что векторы суммируются по принципу параллелограмма.

Ограничимся рассмотрением обычного трехмерного пространства. Будем называть векторами отрезки прямых линий в этом пространстве, для которых задано направление. Будем рассматривать только свободные векторы, которые можно перемещать в пространстве, соблюдая параллельность. Параллельные и сонаправленные свободные векторы будем считать равными. Для обозначения векторов будем, как правило, использовать жирные строчные буквы латинского или греческого алфавита.

При написании вычислительных формул будем применять координатную форму представления векторов, используя правую декартову прямоугольную систему координат. Для вектора **a** координатная форма представляет упорядоченную тройку действительных чисел a_1, a_2, a_3 (координаты этого вектора), записанную в квадратных скобках в виде столбца или в виде строки с верхним индексом T (транспонированный):

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \left[a_1, a_2, a_3 \right]^T . \tag{1.1}$$

Для вектора определены две скалярные характеристики: норма вектора и модуль вектора. Норма вектора обозначается двойными прямыми скобками и вычисляется по формуле:

$$\left\| \mathbf{a} \right\| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 . \tag{1.2}$$

Модуль вектора обозначается прямыми скобками и равен корню квадратному из нормы:

$$\left| \mathbf{a} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \tag{1.3}$$

1.2. Операции над векторами

1. Сложение и вычитание векторов

Суммой двух векторов **a** и **b** есть вектор, построенный на векторах-слагаемых по правилу параллелограмма. В координатной форме сложение векторов выполняется поэлементно:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} . \tag{1.4}$$

Сложение векторов коммутативно. Сложение обозначается знаком "+". Операция вычитания векторов определяется подобно операции сложения и обозначается знаком "–".

2. Умножение вектора на число

Произведением вектора **a** на действительное число *c* есть вектор, координаты которого вычисляются по формуле:

$$\mathbf{a} \cdot c = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot c = \begin{bmatrix} a_1 \cdot c \\ a_2 \cdot c \\ a_3 \cdot c \end{bmatrix} . \tag{1.5}$$

Умножение вектора на число коммутативно. Оно обозначается точкой, поставленной между скалярным и векторным сомножителями.

3. Скалярное умножение векторов

Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** есть скаляр, равный произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла α между направлениями этих векторов. Скалярное произведение двух векторов в прямоугольной декартовой

системе координат равно сумме попарных произведений координат векторов-сомножителей:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 . \qquad (1.6)$$

Скалярное произведение векторов коммутативно. Оно обозначается точкой, поставленной между двумя векторными сомножителями.

4. Векторное умножение векторов

Векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ есть вектор, модуль которого равен:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\alpha ; \qquad (1.7)$$

его направление перпендикулярно к обоим векторам и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от **a** к **b** на угол меньший π. Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. В прямоугольной декартовой системе координат векторное произведение двух векторов можно вычислить по следующей формуле:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{bmatrix}. \qquad (1.8)$$

Векторное произведение антикоммутативно. При перемене порядка сомножителей его знак меняется на обратный. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю. Векторное произведение обозначается знаком "×", поставленным между двумя векторными сомножителями.

5. Смешанное (векторно-скалярное) произведение

Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ≡ [**a, b, c**] есть скаляр, равный объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c,** и взятый со знаком "+" или "–". Знак "+" берется, если векторы **a**, **b**, **c** образуют правую тройку, знак "–" – в противном случае. В прямоугольной декартовой системе координат смешанное произведение трех векторов **a**, **b**, **c** равно детерминанту матрицы, составленной из трех векторов-столбцов **a**, **b**, **c**:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.9)$$

При циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется. Смешанное произведение трех векторов **a**,·**b** и **c** обозначается $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ или [**a, b, c**].

6. Двойное векторное произведение

Двойное векторное произведение трех векторов $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ есть вектор, равный векторному произведению вектора **a** на векторное произведение векторов **b** и **c**. Для двойного векторного произведения справедлива формула:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}). \tag{1.10}$$

Для обозначения двойного векторного произведения будем использовать знак "×".

Если рассматривать **a**, **b**, **c** как векторы-столбцы, то результирующий вектор-столбец **r** можно вычислить при помощи матричных операций по формуле:

$$\mathbf{r}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{c}-\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^T\cdot\mathbf{b}. \tag{1.11}$$

1.3. Использование объекта Леви-Чивиты

При поэлементном написании формул весьма полезным представляется использование абсолютно кососимметричного математического объекта, введенного итальянским математиком Туллио Леви-Чивитой (1873–1941). Для трехмерного пространства в случае применения прямоугольной декартовой системы координат этот объект является функцией трех индексов, каждый из которых принимает по три значения (всего 27 значений). Объект, который носит имя Леви-Чивиты, обозначается символом ε_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) и определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1;\ \varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1;\ \varepsilon_{ijk}=0 \text{ – для других сочетаний индексов.} \tag{1.12}$$

Циклическая перестановка индексов не меняет значения объекта. Перестановка двух соседних индексов приводит к перемене знака объекта.

С использованием символа Леви-Чивиты можно на базе векторов создавать матрицы, векторы, скаляры.

Следующая формула превращает вектор угловой скорости в матрицу спина [21]:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix};\quad S_{ik}=\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\cdot\omega_j=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Обратную операцию – представление кососимметричной составляющей матрицы в виде вектора – выполняет формула:

$$v_j=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\cdot a_{ik}=\left[\frac{a_{32}-a_{23}}{2};\quad\frac{a_{13}-a_{31}}{2};\quad\frac{a_{21}-a_{12}}{2}\right]^T. \tag{1.14}$$

Векторное произведение также легко записывается при помощи символа Леви-Чивиты:

$$\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b};\quad v_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\cdot a_j\cdot b_k=\begin{bmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Далее в этом ряду следует формула смешанного произведения трех векторов:

$$d = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}); \quad d = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\cdot a_i\cdot b_j\cdot c_k = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

Двойное векторное произведение представляется следующим образом:

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}); \quad w_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\cdot a_j\cdot\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{klm}\cdot b_l\cdot c_m\,. \tag{1.17}$$

Полезно знать, что произведение двух символов Леви-Чивиты равно детерминанту, составленному из символов Кронекера:

$$\varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (i,j,k,l,m,n = 1,2,3)\,. \tag{1.18}$$

Напомним, что символ Кронекера определяется следующим образом:

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i = j); \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j)\,. \tag{1.19}$$

После суммирования выражения (1.18) по одному из индексов придем к формуле:

$$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\cdot\delta_{jm} - \delta_{im}\cdot\delta_{jl} \quad (i,j,l,m = 1,2,3)\,. \tag{1.20}$$

Формула (1.20) дает возможность записать выражение (1.17) в виде (1.10):

$$w_i = b_i\cdot\sum_{j=1}^{3}a_j\cdot c_j - c_i\cdot\sum_{j=1}^{3}a_j\cdot b_j\,. \tag{1.21}$$

1.4. Векторное представление ориентации твердого тела

1.4.1. Системы координат

Наиболее важной прикладной задачей, связанной с математическими построениями этой работы, является задача кинематики абсолютно твердого тела. В ней речь идет об определении положения тела в трехмерном пространстве и установлении закономерностей изменения этого положения во времени. Задача эта непростая, хотя бы потому, что даже идея описания ориентации тела в трехмерном пространстве требует хорошей фантазии.

Абсолютно твердое тело – понятие механики, обозначающее совокупность материальных точек, расстояния между которыми сохраняются в процессе любых движений этого тела. Постоянство расстояний позволяет привязать к телу некоторую систему координат. Эта система координат называется подвижной (или связанной). Положением именно этой системы координат по отношению к другой, неподвижной (или базовой) системе координат, будем определять положение абсолютно твердого тела в пространстве.

В качестве и неподвижной, и подвижной будем пользоваться правыми прямоугольными декартовыми системами координат. Пусть неподвижная система координат **X**

имеет координатные орты $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, а связанная с телом подвижная система координат **Y** имеет координатные орты $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$. Поскольку орты этих систем координат единичны и взаимно перпендикулярны, соблюдаются следующие зависимости для их скалярных произведений:

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij}; \quad \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,3), \tag{1.22}$$

где δ_{ij}– символ Кронекера.

Произвольный вектор **b** трехмерного пространства может быть представлен своими координатами как в одной, так и в другой системе координат:

$$\mathbf{b} = {}_{\mathbf{X}}b_1 \cdot \mathbf{x}_1 + {}_{\mathbf{X}}b_2 \cdot \mathbf{x}_2 + {}_{\mathbf{X}}b_3 \cdot \mathbf{x}_3; \quad \mathbf{b} = {}_{\mathbf{Y}}b_1 \cdot \mathbf{y}_1 + {}_{\mathbf{Y}}b_2 \cdot \mathbf{y}_2 + {}_{\mathbf{Y}}b_3 \cdot \mathbf{y}_3. \tag{1.23}$$

Левым нижним индексом будем обозначать используемую систему координат.

Далее будут рассмотрены различные методы представления информации о перемещении тела в пространстве.

1.4.2. Направляющие косинусы

Стандартным методом оцифровки повернутого положения (ориентации) твердого тела в пространстве является использование матрицы направляющих косинусов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Каждой ориентации тела соответствует своя матрица косинусов. Геометрический смысл элементов этой матрицы – скалярные произведения ортов неподвижной системы координат **X** и ортов подвижной системы координат **Y**:

$$a_{jk} = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{y}_k \quad (j,k = 1,2,3). \tag{1.25}$$

Поскольку орты **x** и **y** имеют единичные длины, то элемент матрицы a_{jk} есть косинус угла между ортом с номером j неподвижной системы координат и ортом с номером k подвижной системы координат. Это свойство и определило название матрицы.

Матрица **A** имеет девять элементов, но их нельзя назначать произвольно. Они связаны между собой шестью независимыми уравнениями:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{jk} \cdot a_{jl} = \delta_{kl} \quad (k,l = 1,2,3; l \geq k), \tag{1.26}$$

где δ_{ij}– символ Кронекера.

Матрицы с такими свойствами называются ортогональными. Детерминант такой матрицы равен единице, обратная матрица равна транспонированной:

$$|\mathbf{A}| = 1; \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T. \tag{1.27}$$

Переход от одной системы координат к другой. При помощи направляющих косинусов можно выразить орты неподвижной системы координат через орты подвижной системы и наоборот:

$$\mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} \cdot \mathbf{y}_k \quad (j = 1,2,3); \quad \mathbf{y}_k = \sum_{j=1}^{3} a_{jk} \cdot \mathbf{x}_j \quad (k = 1,2,3). \tag{1.28}$$

Направляющие косинусы связывают координаты любого вектора в неподвижной системе координат с его же координатами в подвижной системе. Так для координат вектора **b** получим следующие формулы:

$${}_{\mathbf{X}}b_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_k \quad (j = 1,2,3); \quad {}_{\mathbf{Y}}b_k = \sum_{j=1}^{3} {}_{\mathbf{X}}b_j \cdot a_{jk} \quad (k = 1,2,3). \tag{1.29}$$

Здесь ${}_{\mathbf{X}}b_j$ – координата с номером j вектора **b** в неподвижной системе координат **X**, ${}_{\mathbf{Y}}b_k$ – координата с номером k вектора **b** в подвижной системе координат **Y**.

В матричной записи формулы (1.29) имеют следующий вид:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{b}; \quad {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{b} = \mathbf{A}^T \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{b}, \tag{1.30}$$

где ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{b}$ – вектор **b**, представленный своими координатами в неподвижной системе **X**, ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{b}$ – вектор **b**, представленный своими координатами в подвижной системе **Y**.

Изменение координат вектора при повороте тела. До сих пор мы толковали о повернутом положении (ориентации) твердого тела в трехмерном пространстве. Теперь введем в рассмотрение понятие перемещения (поворота) тела из одного положения в другое. Пусть в исходном состоянии тело расположено так, что подвижная система координат **Y** совпадает с неподвижной системой **X**. Затем тело перемещается (поворачивается) в положение, определяемое матрицей направляющих косинусов **A**. Абстрагируясь от пути, пройденного телом, будем называть это перемещение поворотом, определяемым матрицей **A**.

Нетрудно представить себе ситуацию, когда в исходном состоянии тело было ориентировано по-иному, так что подвижная система координат **Y** не совпадала с неподвижной системой координат **X**. Тем не менее, тело перемещалось так же, как и в предыдущем случае. Это перемещение также будем считать поворотом, определяемым матрицей **A**.

Пусть вектор **b** зафиксирован в твердом теле. В исходном состоянии перед поворотом, когда системы координат **X** и **Y** совпадают, этот вектор в системе координат **X** (и в системе **Y**) имеет координаты ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{b}$, а после поворота он переходит в положение другого вектора, который будем обозначать **b′**. На основании формулы (1.30) можем записать:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{b}' = \mathbf{A} \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{b}; \quad {}_{\mathbf{X}}b'_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} \cdot {}_{\mathbf{X}}b_k \quad (j = 1,2,3). \tag{1.31}$$

Таким образом, если координаты некоторого вектора **b**, зафиксированного в твердом теле, в исходном состоянии (до поворота) в неподвижной системе координат были

равны $\mathbf{x}b_k$ (k = 1, 2, 3), то после поворота тела, определяемого матрицей **A**, они стали $\mathbf{x}b'_j$ (j = 1, 2, 3), и эти координаты можно вычислить по формуле (1.31).

Суммирование поворотов. Теперь представим себе, что тело выполнило вначале поворот, определяемый матрицей **A1**, а затем поворот, определяемый матрицей **A2**. Возникает вопрос: какой матрицей определяется суммарный поворот?

Путь к решению этой задачи дается формулой (1.31). Возьмем зафиксированный в твердом теле вектор **b** и повернем тело с применением матрицы **A1**. Вектор **b** займет новое положение **b′**, а именно:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{A1} \cdot \mathbf{b} \,. \tag{1.32}$$

Зафиксируем теперь вектор **b′** в твердом теле и повернем тело с применением матрицы **A2**. Тогда вектор **b′** займет положение **b″**. Этот вектор можно вычислить в соответствии с формулой (1.31):

$$\mathbf{b}'' = \mathbf{A2} \cdot \mathbf{b}' \,. \tag{1.33}$$

Подставляя (1.32) в (1.33), получим:

$$\mathbf{b}'' = \mathbf{A2} \cdot \mathbf{A1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \,. \tag{1.34}$$

Таким образом, вместо двух последовательных поворотов, определяемых матрицами направляющих косинусов вначале **A1**, а затем **A2**, можно выполнить один суммарный поворот, определяемый произведением этих матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A2} \cdot \mathbf{A1} \,, \tag{1.35}$$

причем сомножители в этом произведении идут в обратном порядке по отношению к последовательности выполнения поворотов. Эта закономерность по индукции может быть распространена на несколько (n) следующих друг за другом поворотов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{An} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A2} \cdot \mathbf{A1} \,. \tag{1.36}$$

1.4.3. Вектор истинного эйлерова поворота

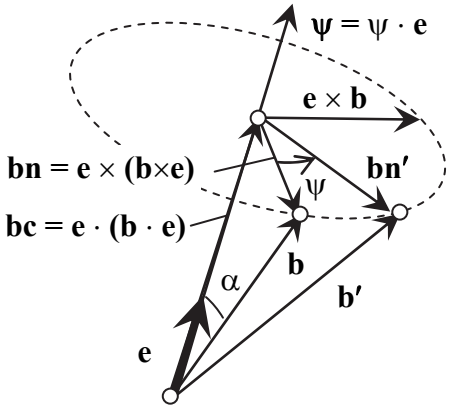


Рис. 1.1. Истинный эйлеров поворот вектора **b**

Фундаментальной теоремой кинематики твердого тела является теорема Эйлера-Даламбера [10], которая утверждает: твердое тело с одной закрепленной точкой может быть переведено из любого начального положения в любое конечное положение с помощью одного поворота вокруг некоторой оси, называемой осью Эйлера. Поворот этот можно описать вектором **ψ**, направленным вдоль оси Эйлера и называемым вектором истинного эйлерова поворота (рис. 1.1):

$$\boldsymbol{\psi} = \left[\psi_1, \psi_2, \psi_3\right]^T = \psi \cdot \mathbf{e} = \psi \cdot \left[e_1, e_2, e_3\right]^T \,, \tag{1.37}$$

где **e** – единичный вектор эйлеровой оси; ψ – угол

поворота. Знак угла поворота соответствует правилу буравчика, то есть положительным считается направление вращения правого буравчика при ввинчивании его в направлении вектора **e**.

Угол поворота ψ и компоненты единичного вектора **e** могут быть найдены по компонентам вектора истинного эйлерова поворота следующим образом:

$$\psi = \pm|\boldsymbol{\psi}|; \quad |\boldsymbol{\psi}| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}; \quad e_j = \frac{\psi_j}{\psi} \quad (j = 1,2,3). \tag{1.38}$$

Как видно, угол поворота может быть принят либо положительным, либо отрицательным. В обоих случаях будет реализоваться один и тот же поворот твердого тела, соответствующий вектору $\boldsymbol{\psi}$.

Разложение вектора **b** *по направлению единичного вектора* **e** *и по нормали к нему.* На рис. 1.1 показан произвольный свободно перемещаемый в твердом теле вектор **b**. Переместим этот вектор параллельно самому себе так, чтобы его начало находилось на оси Эйлера, определяемой единичным вектором **e**. Разложим этот вектор на два слагаемых. Первое из них **bc** направлено вдоль вектора **e**, а второе **bn** – перпендикулярно ему. Векторная алгебра дает следующее решение этой задачи:

$$\mathbf{b} = \mathbf{bc} + \mathbf{bn}; \quad \mathbf{bc} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}); \quad \mathbf{bn} = \mathbf{e} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{e}). \tag{1.39}$$

Для нормальной составляющей этого вектора справедлива и другая формула:

$$\mathbf{bn} = \mathbf{b} - \mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}). \tag{1.40}$$

Разложение вектора на два слагаемых удобно для вывода последующих формул.

Изменение координат вектора при повороте тела. Пусть твердое тело с закрепленным на нем вектором **b** совершило истинный эйлеров поворот $\boldsymbol{\psi}$. После этого вектор **b** занял новое положение, обозначенное на рис. 1.1 символом **b′**. Он является суммой двух векторов:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{bc} + \mathbf{bn}'. \tag{1.41}$$

Первый из этих векторов известен, так как он не изменяется при поворотах вокруг оси $\boldsymbol{\psi}$. Для определения второго построим вспомогательный вектор **e** × **b**. Этот вектор перпендикулярен эйлеровой оси и вектору **bn** и имеет длину $|\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между направлениями векторов **e** и **b**. Такую же длину имеет вектор **bn**.

Из рисунка видно, что вектор **bn′** может быть определен по формуле:

$$\mathbf{bn}' = \cos\psi \cdot \mathbf{bn} + \sin\psi \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{b}). \tag{1.42}$$

Таким образом, повернутый вектор **b′** можно выразить формулой:

$$\mathbf{b}' = \cos\psi \cdot \mathbf{b} + (1 - \cos\psi) \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e} + \sin\psi \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{b}). \tag{1.43}$$

Эта формула получена Б. О. Родригом в 1840 г.

Для того, чтобы перейти к прямоугольным декартоовым координатам, достаточно скалярно умножить векторное равенство (1.43) последовательно на орты координатной системы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, имея в виду, что

$$e_j = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{e}; \quad b_j = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{b}; \quad b'_j = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{b}' \quad (j = 1,2,3), \tag{1.44}$$

где e_1, e_2, e_3; b_1, b_2, b_3; b'_1, b'_2, b'_3 – координаты векторов **e**, **b** и **b′** (соответственно) в этой координатной системе.

Тогда получим:

$$b'_j = \cos\psi \cdot b_j + (1-\cos\psi)\cdot e_j \cdot (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}) + \sin\psi \cdot \mathbf{x}_j \cdot (\mathbf{e}\times\mathbf{b}) \quad (j = 1,2,3). \tag{1.45}$$

Расписывая в координатах скалярное и смешанное произведения, присутствующие в формуле (1.45), придем к выражению:

$$\begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix} = \cos\psi \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + (1-\cos\psi)\cdot(e_1\cdot b_1 + e_2\cdot b_2 + e_3\cdot b_3)\cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \sin\psi \cdot \begin{bmatrix} e_2\cdot b_3 - e_3\cdot b_2 \\ e_3\cdot b_1 - e_1\cdot b_3 \\ e_1\cdot b_2 - e_2\cdot b_1 \end{bmatrix}. \tag{1.46}$$

Если нам удобно представить результат в виде формулы (1.31), где используется матрица направляющих косинусов **A**, надо положить:

$$\mathbf{A} = \cos\psi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\psi)\cdot \begin{pmatrix} e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 & e_1\cdot e_3 \\ e_2\cdot e_1 & e_2\cdot e_2 & e_2\cdot e_3 \\ e_3\cdot e_1 & e_3\cdot e_2 & e_3\cdot e_3 \end{pmatrix} + \sin\psi \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Полезно знать и другое представление формулы (1.47), позаимствованное из работы [21]. Оно базируется на разложении матрицы **A** по степеням матрицы **S**(**e**):

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}^2(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} e_1^2 - 1 & e_1\cdot e_2 & e_1\cdot e_3 \\ e_2\cdot e_1 & e_2^2 - 1 & e_2\cdot e_3 \\ e_3\cdot e_1 & e_3\cdot e_2 & e_3^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{1.48}$$

Это представление имеет вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \sin\psi\cdot\mathbf{S}(\mathbf{e}) + (1-\cos\psi)\cdot\mathbf{S}^2(\mathbf{e}), \tag{1.49}$$

где **I** – единичная матрица (нулевая степень матрицы **S**(**e**)).

Любопытно, что

$$\mathbf{S}^0(\mathbf{e}) = \mathbf{I}; \quad \mathbf{S}^3(\mathbf{e}) = -\mathbf{S}(\mathbf{e}); \quad \mathbf{S}^4(\mathbf{e}) = -\mathbf{S}^2(\mathbf{e}); \quad \mathbf{S}^5(\mathbf{e}) = \mathbf{S}(\mathbf{e}). \tag{1.50}$$

Переход от одной системы координат к другой. Координаты произвольного вектора **b** преобразуются по формулам (1.29)–(1.30), а матрица **A** дается формулой (1.47)**.** Обратим лишь внимание на то, что транспонированная матрица может быть получена по формуле:

$$\mathbf{A}^T = \cos\psi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos\psi) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{pmatrix} - \sin\psi \cdot \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

или представлена в таком виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \sin\psi \cdot \mathbf{S}(\mathbf{e}) + (1-\cos\psi) \cdot \mathbf{S}^2(\mathbf{e}). \quad (1.52)$$

В покомпонентном виде формулы преобразования координат выглядят так:

$$\begin{bmatrix} {}_{\mathbf{X}}b_1 \\ {}_{\mathbf{X}}b_2 \\ {}_{\mathbf{X}}b_3 \end{bmatrix} = \cos\psi \cdot \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}b_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_3 \end{bmatrix} + (1-\cos\psi) \cdot (e_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_1 + e_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_2 + e_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_3) \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \sin\psi \cdot \begin{bmatrix} e_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_3 - e_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_2 \\ e_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_1 - e_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_3 \\ e_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_2 - e_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}b_1 \end{bmatrix}; \quad (1.53)$$

$$\begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}b_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_3 \end{bmatrix} = \cos\psi \cdot \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{X}}b_1 \\ {}_{\mathbf{X}}b_2 \\ {}_{\mathbf{X}}b_3 \end{bmatrix} + (1-\cos\psi) \cdot (e_1 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_1 + e_2 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_2 + e_3 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_3) \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} - \sin\psi \cdot \begin{bmatrix} e_2 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_3 - e_3 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_2 \\ e_3 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_1 - e_1 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_3 \\ e_1 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_2 - e_2 \cdot {}_{\mathbf{X}}b_1 \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Переход от матрицы направляющих косинусов к вектору истинного эйлерова поворота. По элементам матрицы направляющих косинусов можно определить вектор истинного эйлерова поворота. Известно, что

$$\cos\psi = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}; \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{(a_{32} - a_{23})^2 + (a_{13} - a_{31})^2 + (a_{21} - a_{12})^2}}{2}. \quad (1.55)$$

Отсюда можно найти угол ψ:

$$\psi = \arccos\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} = \arg(\cos\psi + i \cdot \sin\psi), \quad (1.56)$$

где i – мнимая единица.

При этом угол будет находиться в пределах $[0, \pi]$.

Формула (1.56) дает два метода определения угла ψ. Один из них использует функцию arccos. Метод обладает тем недостатком, что функция arccos плохо обусловлена у краев интервала $[0, \pi]$ и может приводить к заметным погрешностям при вычислениях ψ, близких к нулю или π. Другой метод использует функцию arg комплексного числа и лишен этого недостатка.

Зная значение угла ψ, можно записать выражения для компонентов единичного вектора эйлеровой оси:

$$e_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \cdot \sin\psi}; \quad e_1 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \cdot \sin\psi}; \quad e_1 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \cdot \sin\psi} \quad (1.57)$$

и для вектора в целом:

$$\boldsymbol{\psi} = \left[\psi \cdot e_1; \quad \psi \cdot e_1; \quad \psi \cdot e_1\right]^T. \tag{1.58}$$

Здесь уместно будет сделать некоторые замечания. Теорема Эйлера-Даламбера не дает ответа на вопрос о величине угла, на который надо повернуть тело вокруг эйлеровой оси, чтобы привести его в конечное положение, описываемое матрицей направляющих косинусов **A**. Этот угол не определяется однозначно, поскольку поворот тела на целое число полных поворотов не изменяет его ориентации в пространстве. Формула (1.56) приводит нас к некоторому положительному углу ψ, находящемуся в интервале $[0, \pi]$. Этот угол обладает определенными преимуществами по отношению к другим углам. Во-первых, интервал $[0, \pi]$ соответствует главному значению функции arccos, что позволяет пользоваться этой функцией; во-вторых, внутри этого интервала функция sin не имеет нулей и положительна, что удобно, когда она оказывается в знаменателе. Поэтому, если история перемещения тела для нас не существенна, будем отдавать предпочтение именно этому интервалу изменения угла поворота тела.

Суммирование поворотов. Пусть твердое тело выполнило последовательно два поворота: вначале поворот, определяемый вектором $\boldsymbol{\psi 1} = \psi 1 \cdot \mathbf{e1}$, а затем поворот, определяемый вектором $\boldsymbol{\psi 2} = \psi 2 \cdot \mathbf{e2}$. где **e1**, **e2**, – единичные векторы осей поворота, $\psi 1$, $\psi 2$ – углы поворота. Требуется определить вектор истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\psi}$ (или единичный вектор оси **e** и угол поворота ψ), который приводит к тому же положению твердого тела, что и два последовательных оговоренных выше поворота.

Для случая, когда заданы векторы истинных эйлеровых поворотов, получаются сложные труднообозримые формулы. Тем не менее, приведем их здесь на основании работы [21]. Косинус угла поворота может быть вычислен по формуле:

$$\cos\psi = \cos\psi 1 \cdot \cos\psi 2 - \sin\psi 1 \cdot \sin\psi 2 \cdot \cos\alpha - \frac{1 + \cos\psi 1 \cdot \cos\psi 2 - \cos\psi 1 - \cos\psi 2}{2} \cdot \sin^2\alpha. \tag{1.59}$$

Единичный вектор **e** может быть вычислен из соотношения:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin\psi \cdot \mathbf{e} = {} & \mathbf{e1} \cdot \left[\sin\psi 1 \cdot (1 + \cos\psi 2) - (1 - \cos\psi 1) \cdot \sin\psi 2 \cdot \cos\alpha\right] + \\ & + \mathbf{e2} \cdot \left[(1 + \cos\psi 1) \cdot \sin\psi 2 - \sin\psi 1 \cdot (1 - \cos\psi 2) \cdot \cos\alpha\right] + \\ & + (\mathbf{e1} \times \mathbf{e2}) \cdot \left[\sin\psi 1 \cdot \sin\psi 2 - (1 - \cos\psi 1) \cdot (1 - \cos\psi 2) \cdot \cos\alpha\right], \end{aligned} \tag{1.60}$$

где α – угол между единичными векторами **e1** и **e2**.

1.4.4. Вектор конечного поворота

Именно по той причине, что классический вектор истинного эйлерова поворота приводит к громоздким формулам, он не нашел практического применения в задачах кинематики твердого тела. Более удобным оказался вектор, определяемый следующей формулой:

$$\boldsymbol{\theta} = 2 \cdot \mathbf{e} \cdot \mathrm{tg}\frac{\psi}{2}, \tag{1.61}$$

где **e** – единичный вектор оси поворота, ψ – угол поворота вокруг этой оси.

Он был введен в рассмотрение еще Родригом и называется вектором конечного поворота.

Суммирование поворотов. При помощи вектора конечного поворота компактно записываются векторные формулы для суммирования поворотов. Приведем их ниже, воспользовавшись результатами монографии А. И. Лурье [37].

Пусть твердое тело выполнило последовательно два поворота: вначале поворот, определяемый вектором $\boldsymbol{\theta 1}$, а затем поворот, определяемый вектором $\boldsymbol{\theta 2}$. Требуется найти вектор $\boldsymbol{\theta}$, который приводит к тому же положению твердого тела, что и два последовательных оговоренных выше поворота. Искомая формула имеет вид:

$$\boldsymbol{\theta} = \left[1 - \frac{\boldsymbol{\theta 2}\cdot\boldsymbol{\theta 1}}{4}\right]^{-1} \cdot \left[\boldsymbol{\theta 2} + \boldsymbol{\theta 1} + \frac{\boldsymbol{\theta 2}\times\boldsymbol{\theta 1}}{2}\right]. \tag{1.62}$$

Изменение координат вектора при повороте тела. Пусть твердое тело с закрепленным на нем вектором **b** совершило конечный поворот, определяемый вектором $\boldsymbol{\theta}$. После этого вектор **b** занял новое положение **b′**. Этот вектор можно определить по формуле:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\theta} \times \left[\mathbf{b} + \frac{\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{b}}{2}\right]. \tag{1.63}$$

Обратная зависимость:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}' - \left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\theta} \times \left[\mathbf{b}' - \frac{\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{b}'}{2}\right]. \tag{1.64}$$

Переход от вектора конечного поворота к матрице направляющих косинусов. Прежде всего, запишем несколько полезных тригонометрических формул:

$$\cos\psi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}; \quad 1 - \cos\psi = \frac{2\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}}; \quad \sin\psi = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}} \quad (-\pi < \psi < \pi). \tag{1.65}$$

Воспользовавшись представлением матрицы направляющих косинусов формулой (1.49), с учетом формул (1.65) получим:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}\right)^{-1} \cdot \left[2\cdot\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{e}) + 2\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}\cdot\mathbf{S}^2(\mathbf{e})\right]. \tag{1.66}$$

Переходя к вектору конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$, определяемому формулой (1.61) (обозначения единичного вектора **e** и угла поворота ψ те же), придем к окончательной формуле:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1} \cdot \left[\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta})\right], \tag{1.67}$$

где

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \theta_1^2 - \boldsymbol{\theta}^2 & \theta_1 \cdot \theta_2 & \theta_1 \cdot \theta_3 \\ \theta_2 \cdot \theta_1 & \theta_2^2 - \boldsymbol{\theta}^2 & \theta_2 \cdot \theta_3 \\ \theta_3 \cdot \theta_1 & \theta_3 \cdot \theta_2 & \theta_3^2 - \boldsymbol{\theta}^2 \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

Переход от матрицы направляющих косинусов к вектору конечного поворота. Зная элементы матрицы направляющих косинусов **A**, можно получить компоненты вектора конечного поворота **θ**, пользуясь равенством (1.67). В левой части этого равенства находятся элементы матрицы **A**, в правой части – компоненты вектора **θ**. Приравнивая следы (суммы диагональных элементов) матриц, стоящих слева и справа от знака равенства, приходим к уравнению:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 - \boldsymbol{\theta}^2 \cdot \left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1}, \tag{1.69}$$

из которого определяем скалярный квадрат вектора конечного поворота:

$$\boldsymbol{\theta}^2 = 4 \cdot \frac{3 - a_{11} - a_{22} - a_{33}}{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}, \tag{1.70}$$

а также множитель

$$\left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1} = \frac{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}{4}. \tag{1.71}$$

Далее приравниваем попарные разности элементов матрицы **A**, находящихся в левой и правой частях равенства (1.67):

$$a_{32} - a_{23} = \left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1} \cdot 2 \cdot \theta_1; \; a_{13} - a_{31} = \left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1} \cdot 2 \cdot \theta_2; \; a_{21} - a_{12} = \left(1 + \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{4}\right)^{-1} \cdot 2 \cdot \theta_3, \tag{1.72}$$

из которых с учетом (1.71) находим компоненты вектора конечного поворота:

$$\theta_1 = \frac{2 \cdot (a_{32} - a_{23})}{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}; \quad \theta_2 = \frac{2 \cdot (a_{13} - a_{31})}{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}; \quad \theta_3 = \frac{2 \cdot (a_{21} - a_{12})}{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}. \tag{1.73}$$

Переход от одной системы координат к другой. Координаты произвольного вектора **b** преобразуются по формулам (1.29)–(1.30), а матрица **A** дается формулой (1.67)**.** В покомпонентном виде формулы преобразования координат выглядят так:

$$\begin{bmatrix} {}_{\mathbf{X}}b_1 \\ {}_{\mathbf{X}}b_2 \\ {}_{\mathbf{X}}b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}b_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_3 \end{bmatrix} + \frac{4}{4 + \boldsymbol{\theta}^2} \cdot \left\{ \frac{\theta_1 \cdot_{\mathbf{Y}} b_1 + \theta_2 \cdot_{\mathbf{Y}} b_2 + \theta_3 \cdot_{\mathbf{Y}} b_3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} - \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{2} \cdot \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}b_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_2 \cdot_{\mathbf{Y}} b_3 - \theta_3 \cdot_{\mathbf{Y}} b_2 \\ \theta_3 \cdot_{\mathbf{Y}} b_1 - \theta_1 \cdot_{\mathbf{Y}} b_3 \\ \theta_1 \cdot_{\mathbf{Y}} b_2 - \theta_2 \cdot_{\mathbf{Y}} b_1 \end{bmatrix} \right\}; \tag{1.74}$$

$$\begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}b_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{X}}b_1 \\ {}_{\mathbf{X}}b_2 \\ {}_{\mathbf{X}}b_3 \end{bmatrix} + \frac{4}{4+\boldsymbol{\theta}^2} \cdot \left\{ \frac{\theta_1 \cdot_{\mathbf{X}} b_1 + \theta_2 \cdot_{\mathbf{X}} b_2 + \theta_3 \cdot_{\mathbf{X}} b_3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} - \frac{\boldsymbol{\theta}^2}{2} \cdot \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{X}}b_1 \\ {}_{\mathbf{X}}b_2 \\ {}_{\mathbf{X}}b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_2 \cdot_{\mathbf{X}} b_3 - \theta_3 \cdot_{\mathbf{X}} b_2 \\ \theta_3 \cdot_{\mathbf{X}} b_1 - \theta_1 \cdot_{\mathbf{X}} b_3 \\ \theta_1 \cdot_{\mathbf{X}} b_2 - \theta_2 \cdot_{\mathbf{X}} b_1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.75)$$

где $\boldsymbol{\theta}^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$.

Сравнивая методы представления информации об ориентации твердого тела в пространстве, приведенные в разделе 1.4, отметим следующее. Известно, что твердое тело с одной закрепленной точкой имеет в трехмерном пространстве три степени свободы. Это означает, что для численного описания его ориентации в трехмерном пространстве достаточно трех действительных чисел. Мы рассмотрели три метода представления информации.

Первый из них предполагает использование для этой цели девяти направляющих косинусов, которые удобно считать элементами матрицы третьего порядка. Каждое положение тела в трехмерном пространстве однозначно определяет все девять направляющих косинусов. Однако не всякие девять чисел определяют ориентацию твердого тела в трехмерном пространстве. Эти числа должны удовлетворять шести уравнениям (1.26). Но и этого недостаточно. Детерминант матрицы, элементами которой являются направляющие косинусы, должен быть положительным.

Второй метод использует координаты вектора истинного эйлерова поворота. Этих координат три – по одной на каждую степень свободы. Любые три действительных числа, являясь координатами вектора истинного эйлерова поворота, однозначно определяют ориентацию твердого тела. Однако одной ориентации твердого тела соответствует бесконечное (а именно, счетное) множество троек действительных чисел. Координаты коллинеарных векторов, длины которых отличаются на $2 \cdot \pi \cdot n$, где n – произвольное целое число, определяют одну и ту же ориентацию тела.

Третий метод использует тройку координат вектора конечного поворота. В этом случае взаимно однозначное соответствие между тройками координат и ориентацией твердого тела наблюдается почти всюду. Исключение составляют ориентации, получающиеся из исходной поворотом твердого тела вокруг любой оси, проходящей через неподвижную точку, на угол $\pm \pi$. Эти ориентации соответствуют векторам бесконечной длины. Еще одна неприятность, связанная с этими ориентациями, заключается в том, что нарушается непрерывность между поворотами твердого тела и координатами вектора истинного эйлерова поворота. Бесконечно близким ориентациям твердого тела соответствуют координаты, разность между которыми стремится к бесконечности.

Об этих особенностях надо помнить при выборе метода представления информации об ориентации твердого тела в пространстве.

1.5. Кинематические уравнения

В этом разделе рассмотрим задачу о вращении абсолютно твердого тела с одной неподвижной точкой. Будем полагать, что тело находится в движении и в каждый момент времени занимает новое положение. Это означает, что кинематические параметры, которые определяют положение тела, являются функциями времени.

Известно, что движущееся твердое тело в каждый момент времени ведет себя так, будто оно вращается вокруг мгновенно-неподвижной оси, определяемой вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Задача этого раздела заключается в выводе кинематических дифференциальных уравнений, которые связывают вектор угловой скорости вращения тела $\boldsymbol{\omega}$ с производными по времени от кинематических параметров. В качестве кинематических параметров будут рассмотрены элементы матрицы направляющих косинусов, координаты вектора истинного эйлерова поворота и координаты вектора конечного поворота.

1.5.1. Направляющие косинусы

Итак, рассмотрим случай, когда положение движущегося твердого тела с одной неподвижной точкой определяется матрицей направляющих косинусов $\mathbf{A}(t)$, которая является функцией времени t. В каждый момент времени известен вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$. Требуется определить скорость изменения матрицы направляющих косинусов $\dfrac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$.

В разделе 1.4.2 представлена формула (1.35), которая определяет матрицу направляющих косинусов **A** после двух последовательных поворотов **A1** и **A2**. Будем считать, что первый поворот произошел в соответствии с матрицей косинусов **A**, а второй поворот – в соответствии с пока не известной матрицей косинусов **A2**. Этот поворот был выполнен вокруг мгновенно-неподвижной оси, определяемой вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ с координатами $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ за время dt. Матрица $\mathbf{A2}(t)$ имеет вид:

$$\mathbf{A2}(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+dt\cdot\begin{bmatrix}0&-\omega_3(t)&\omega_2(t)\\\omega_3(t)&0&-\omega_1(t)\\-\omega_2(t)&\omega_1(t)&0\end{bmatrix}=\mathbf{E}+dt\cdot\mathbf{S}\left[\boldsymbol{\omega}(t)\right]. \tag{1.76}$$

Тогда скорость изменения матрицы направляющих косинусов выразится формулой:

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}=\frac{\mathbf{A2}(t)\cdot\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(t)}{dt}=\frac{\left\{\mathbf{E}+dt\cdot\mathbf{S}\left[\boldsymbol{\omega}(t)\right]\right\}\cdot\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(t)}{dt}=\mathbf{S}\left[\boldsymbol{\omega}(t)\right]\cdot\mathbf{A}(t). \tag{1.77}$$

Покомпонентно формула выглядит так:

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}=\mathbf{S}\left[{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}(t)\right]\cdot\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&-{}_{\mathbf{X}}\omega_3(t)&{}_{\mathbf{X}}\omega_2(t)\\{}_{\mathbf{X}}\omega_3(t)&0&-{}_{\mathbf{X}}\omega_1(t)\\-{}_{\mathbf{X}}\omega_2(t)&{}_{\mathbf{X}}\omega_1(t)&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&a_{13}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&a_{23}(t)\\a_{31}(t)&a_{32}(t)&a_{33}(t)\end{bmatrix}. \tag{1.78}$$

В этой формуле подчеркнуто, что компоненты вектора угловой скорости нужно брать в неподвижной системе координат.

1.5.2. Вектор истинного эйлерова поворота

Рассмотрим случай, когда положение движущегося твердого тела с одной неподвижной точкой определяется вектором истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\psi}$, являюще-

гося функцией времени t. Этот вектор может быть представлен в виде произведения скалярного угла поворота ψ на единичный вектор оси поворота **e**:

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \psi(t) \cdot \mathbf{e}(t). \tag{1.79}$$

В каждый момент времени известен вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$. Требуется определить скорость изменения вектора $\boldsymbol{\psi}(t)$.

Воспользуемся формулами сложения поворотов (1.59) и (1.60). Будем полагать, что первый поворот, определяемый в формулах (1.59) и (1.60) вектором **ψ1,** соответствует вектору **ψ**, а второй поворот, определяемый в формулах (1.59) и (1.60) вектором **ψ2,** соответствует вектору $\boldsymbol{\omega} \cdot dt$. Он выполняется вокруг оси с единичным вектором **e2**, бесконечно мал и равен $\omega \cdot dt$:

$$\boldsymbol{\psi 2}(t) = \mathbf{e2}(t) \cdot \omega(t) \cdot dt. \tag{1.80}$$

С учетом этого формулы (1.59) и (1.60) приобретут вид:

$$\cos\psi(t) + d\cos\psi(t) = \cos\psi(t) - \sin\psi(t) \cdot \cos\alpha(t) \cdot \omega(t) \cdot dt; \tag{1.81}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin\psi 1(t) \cdot \mathbf{e1}(t) + d\left[2 \cdot \sin\psi 1(t) \cdot \mathbf{e1}(t)\right] = {} & 2 \cdot \sin\psi 1(t) \cdot \mathbf{e1}(t) - \\ -\mathbf{e}(t) \cdot \left[1 - \cos\psi(t)\right] \cdot \cos\alpha(t) \cdot \omega(t) \cdot dt + \mathbf{e2}(t) \cdot \left[1 + \cos\psi(t)\right] \cdot \omega(t) \cdot dt + {} & \\ + \left[\mathbf{e}(t) \times \mathbf{e2}(t)\right] \cdot \sin\psi(t) \cdot \omega(t) \cdot dt. & \end{aligned} \tag{1.82}$$

После элементарных преобразований получим:

$$\frac{d\cos\psi(t)}{dt} = -\sin\psi(t) \cdot \omega(t) \cdot \cos\alpha(t); \tag{1.83}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\left[2 \cdot \sin\psi(t) \cdot \mathbf{e}(t)\right]}{dt} = {} & -\mathbf{e}(t) \cdot \left[1 - \cos\psi(t)\right] \cdot \omega(t) \cdot \cos\alpha(t) + \\ + \mathbf{e2}(t) \cdot \left[1 + \cos\psi(t)\right] \cdot \omega(t) + {} & \left[\mathbf{e}(t) \times \mathbf{e2}(t)\right] \cdot \sin\psi(t) \cdot \omega(t). \end{aligned} \tag{1.84}$$

Раскрывая производную в левой части равенства (1.83) и упрощая его, получим:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \omega(t) \cdot \cos\alpha(t) = \left[\mathbf{e}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t)\right]. \tag{1.85}$$

Напоминаем, что α – угол между направлениями **e** и **e2**.

Производная левой части равенства (1.84) с учетом формулы (1.85) раскрывается так:

$$\frac{d\left[2 \cdot \sin\psi(t) \cdot \mathbf{e}(t)\right]}{dt} = 2 \cdot \cos\psi(t) \cdot \omega(t) \cdot \mathbf{e}(t) \cdot \cos\alpha(t) + 2 \cdot \sin\psi(t) \cdot \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt}. \tag{1.86}$$

Приравнивая это выражение правой части формулы (1.84), получим:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \left\{\boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{e}(t) \cdot \left[\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{e}(t)\right]\right\} \frac{1 + \cos\psi(t)}{2 \cdot \sin\psi(t)} + \frac{\left[\mathbf{e}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)\right]}{2}. \tag{1.87}$$

С учетом формул (1.39) и (1.40) можем записать:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \mathbf{e}(t) \times \left[\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t)\right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\psi(t)}{2} + \frac{\left[\mathbf{e}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)\right]}{2}. \tag{1.88}$$

Здесь также учтена зависимость:

$$\frac{1 + \cos \psi(t)}{2 \cdot \sin \psi(t)} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\psi(t)}{2}. \tag{1.89}$$

Таким образом, получены скорости изменения угла ψ (1.85) и единичного вектора $\mathbf{e}$ (1.88). Нам же требуется найти скорость изменения вектора $\boldsymbol{\psi}$, выражаемого формулой (1.79). Дифференцируя эту формулу, получим:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \mathbf{e}(t) + \psi(t) \cdot \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt}. \tag{1.90}$$

Подставляя сюда выражения из формул (1.85) и (1.88), окончательно получим:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt} = \frac{\boldsymbol{\psi}(t) \cdot \left[\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t)\right]}{\psi^2(t)} + \frac{\boldsymbol{\psi}(t) \times \left[\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\psi}(t)\right]}{\psi(t)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\psi(t)}{2} + \frac{\left[\boldsymbol{\psi}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)\right]}{2}. \tag{1.91}$$

Это – векторная формула, которая эквивалентна трем скалярным формулам. Кроме того, формула справедлива для любой системы координат, в том числе, и для неподвижной, и для подвижной. Важно только, чтобы все векторные величины, входящие в формулу, выражались в одной и той же системе координат. Следует также заметить, что правая часть формулы (1.91) состоит из трех взаимно перпендикулярных векторных слагаемых. Первое из них коллинеарно вектору $\boldsymbol{\psi}$, второе перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\psi}$, но компланарно вектору $\boldsymbol{\omega}$, третье – перпендикулярно и вектору $\boldsymbol{\psi}$, и вектору $\boldsymbol{\omega}$.

1.5.3. Вектор конечного поворота

Рассмотрим теперь случай, когда положение движущегося твердого тела с одной неподвижной точкой определяется вектором конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$, являющегося функцией времени t. Этот вектор выражается формулой (1.61) и в нашем случае может быть представлен так:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi(t)}{2} \cdot \mathbf{e}(t), \tag{1.92}$$

где $\psi(t)$ – скалярный угол поворота, $\mathbf{e}(t)$ – единичный вектор оси поворота.

В каждый момент времени известен вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$. Требуется определить скорость изменения вектора $\boldsymbol{\theta}$ (t).

Воспользуемся формулой сложения поворотов (1.62). Как и в предыдущих случаях будем полагать, что первый поворот, определяемый в формуле (1.62) вектором $\boldsymbol{\theta 1}$, выполняется вокруг оси с единичным вектором $\mathbf{e}$ на угол $\psi(t)$, а второй поворот, определяемый в формуле (1.62) вектором $\boldsymbol{\theta 2}$, выполняется вокруг оси с единичным

вектором **e2**, является бесконечно малым и составляет величину ω·*dt*. Вектор второго конечного поворота определяется формулой:

$$\boldsymbol{\theta 2}(t) = 2 \cdot \mathrm{tg}\frac{\omega(t) \cdot dt}{2} \cdot \mathbf{e2}(t) = \omega(t) \cdot dt \cdot \mathbf{e2}(t). \tag{1.93}$$

Подставляя исходные данные в формулу (1.62), получим:

$$\boldsymbol{\theta}(t) + d\boldsymbol{\theta}(t) = \left[1 - \frac{\omega(t) \cdot dt}{4} \cdot \left[\mathbf{e2}(t) \cdot \boldsymbol{\theta}(t)\right]\right]^{-1} \cdot \left[\omega(t) \cdot dt \cdot \mathbf{e2}(t) + \boldsymbol{\theta}(t) + \frac{\omega(t) \cdot dt}{2} \cdot \left[\mathbf{e2}(t) \times \boldsymbol{\theta}(t)\right]\right]. \tag{1.94}$$

После некоторых преобразований придем к формуле:

$$\boldsymbol{\theta}(t) + d\boldsymbol{\theta}(t) = \left[1 + \frac{dt}{4} \cdot \left[\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\theta}(t)\right]\right] \cdot \left[dt \cdot \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\theta}(t) + \frac{dt}{2} \cdot \left[\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\theta}(t)\right]\right], \tag{1.95}$$

из которой следует:

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2} \cdot \left[\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\theta}(t)\right] + \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{\theta}(t) \cdot \left[\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{\theta}(t)\right]. \tag{1.96}$$

Это и есть кинематическое векторное дифференциальное уравнение, позволяющее определить скорость изменения вектора конечного поворота $\boldsymbol{\theta}(t)$ через известный вектор скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$. Это – векторная формула, которая эквивалентна трем скалярным формулам. Формула справедлива для любой системы координат. Правая часть формулы (1.96) состоит из трех векторных слагаемых. Первое из них коллинеарно вектору $\boldsymbol{\theta}$, второе коллинеарно вектору $\boldsymbol{\omega}$ (оно и есть тот самый вектор), третье – перпендикулярно обоим этим векторам. Правая часть формулы не содержит тригонометрических функций.

Сравнивая кинематические уравнения, где в качестве кинематических параметров, которые определяют положение тела, выступают направляющие косинусы, координаты вектора истинного эйлерова поворота или координаты вектора конечного поворота, отметим следующее.

Наиболее простая форма дифференциальных уравнений получается в случае использования матрицы направляющих косинусов. Такими уравнениями чаще всего пользуются на практике. Однако в этом случае получается система не из трех, а из девяти дифференциальных уравнений, решение которой требует заметных затрат компьютерного времени. Это бывает важно, если интегрирование уравнений должно производиться, например, в космическом полете в режиме реального времени. Вторая неприятность заключается в том, что между элементами матрицы направляющих косинусов должны соблюдаться алгебраические связи, обеспечивающие ортогональность этой матрицы. Если о соблюдении этих связей не заботиться, то из-за ошибок округления при вычислениях ортогональность матрицы направляющих косинусов постепенно нарушается, что приводит к неточным, а иногда и к нелепым результатам. Поэтому изначально простой алгоритм решения системы дифференциальных уравнений приходится утяжелять шагами ортогонализации матрицы направляющих косинусов.

Второй вид кинематических уравнений получается, если нужно определить координаты вектора истинного эйлерова поворота. В этом случае число искомых функций равно числу степеней свободы и никаких связей между искомыми параметрами соблюдать не нужно. Однако получается система дифференциальных уравнений достаточно сложного вида, причем, определение коэффициентов уравнений требует вычисления тригонометрических функций.

Третий вид кинематических уравнений получается, если нужно определить координаты вектора конечного поворота. В этом случае число искомых функций также равно числу степеней свободы и эти функции друг от друга не зависят. Система дифференциальных уравнений по сравнению с предыдущим случаем упрощается, однако если угол поворота твердого тела по отношению к исходному состоянию приближается к π, коэффициенты этой системы стремятся к бесконечности, и она вырождается. Вектор конечного поворота удобен для аналитических преобразований.

2. Кватернионы

Кватернионы были введены в математику Уильямом Роуэном Гамильтоном (William Rowan Hamilton). Они являются хорошим инструментом для решения многих задач, связанных с трехмерным пространством, и учитывают его особенности, не наблюдающиеся в произвольных *n*-мерных пространствах. История о том, как Гамильтон изобрел кватернионы, приведена здесь по материалам книги [32].



Уильям Роуэн Гамильтон
(1805–1865)

В 1835 году, в возрасте 30 лет, Гамильтон научился работать с комплексными числами как с парами действительных. Вдохновленный связью между комплексными числами и двумерной геометрией, он в течение многих лет пытался изобрести похожую алгебру, которая играла бы аналогичную роль в трехмерной геометрии. То, что он искал, на современном языке называлось бы трехмерной нормированной алгеброй с делением. Причина его затруднений состояла в том, что трехмерной нормированной алгебры с делением не существует.

Но его многолетние мучения все же были вознаграждены. 16 октября 1843 года, прогуливаясь с женой вдоль Королевского канала по дороге на заседание Королевской ирландской академии в Дублине, он совершил эпохальное открытие. Позже он вспоминал: «Можно сказать, я здесь и сейчас почувствовал, как электрическая цепь мысли замкнулась, а засверкавшие искры оказались фундаментальными соотношениями

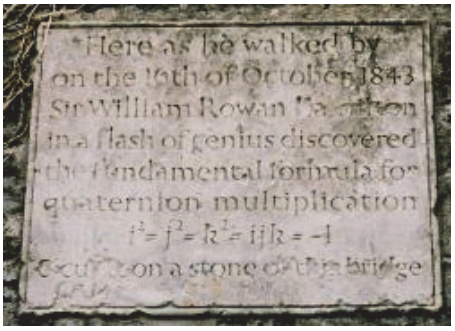
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = -1,$$

представленными именно в том виде, в каком я их с тех пор использовал». Тогда же Гамильтон совершил знаменитый акт математического вандализма – он вырезал эти соотношения на каменных перилах моста Брум, что иллюстрируется следующим рисунком.

Here as he walked by on the 16-th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = -1$$

& cut it on a stone of this bridge.



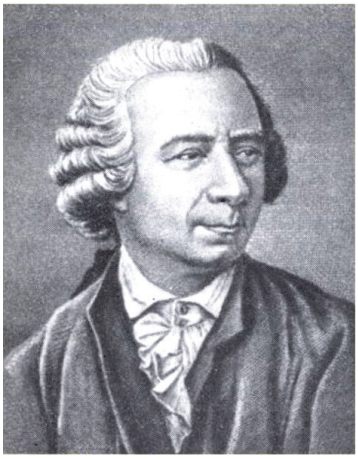
Здесь во время прогулки 16-го октября 1843 года, Сэр Уильям Роуэн Гамильтон в гениальном озарении открыл фундаментальную формулу перемножения кватернионов

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = -1$$

и высек ее на камне этого моста.

Памятная табличка на мосту Брум Бридж в Дублине

Одна из причин, по которой эта история столь хорошо известна, состоит в том, что с этого момента и до конца своей жизни Гамильтон был одержим идеей исследования кватернионов и применения их в геометрии. В течение некоторого времени кватернионы действительно были в моде. В Дублине они в обязательном порядке входили в программу экзаменов, а в некоторых американских университетах кватернионы были единственным изучавшимся разделом высшей математики. Многое из того, что мы сейчас делаем со скалярами и векторами трехмерного пространства, делалось тогда с помощью вещественных и мнимых кватернионов.



Леонард Эйлер
(1707–1783)

Возникла целая школа «кватернионщиков», которую после смерти Гамильтона возглавляли Питер Тэйт из Эдинбурга и Бенджамин Пирс из Гарварда. Тэйт написал о кватернионах восемь книг, в которых особое внимание уделялось приложениям к физике. Когда Гиббс изобрел современные обозначения для скалярного и векторного произведений, Тэйт обозвал их «уродцами-гермафродитами».



Бенжамэн Олинд Родриг
(1795–1851)

Развернулась горячая полемика, в ходе которой такие знаменитости, как Кельвин и Хевисайд, разражались убийственными высказываниями в адрес кватернионов. В конце концов, кватернионы были побеждены и приобрели несколько дурную репутацию, от которой они в полной мере так и не избавились.

Добавим, что хотя Гамильтон действительно был первым, кто построил кватернионы как алгебру, у кватернионов есть и более ранняя история, начинающаяся с открытия Эйлером в 1748 году тождества четырех квадратов. Кроме того, видный французский математик Б. О. Родриг в своих исследованиях параметризовал общий поворот с помощью четырех чисел, являющихся фактически компонентами соответствующего кватерниона. Это позволяет рассматривать его как предвестника идей Гамильто-

на, поскольку приводимое им правило умножения совпадает с формулой Гамильтона для произведения двух кватернионов.

2.1. Основные понятия

Кватернион – это упорядоченная четверка действительных чисел:

$$\mathbf{q} = \left[q_0, q_1, q_2, q_3\right], \tag{2.1}$$

содержащая в себе информацию о скаляре и трехмерном векторе. Кватернион условимся обозначать жирными прямыми символами, а его компоненты (числа из четверки) теми же, но тощими наклонными символами с нижним индексом. Кватернион в компонентах будем изображать в виде строки или столбца (в зависимости от удобства написания) в квадратных скобках.

В кватернионе различают скалярную часть (scalar-part):

$$\text{scal}\,\mathbf{q} = q_0, \tag{2.2}$$

представляющую собой скаляр, и векторную часть (vector-part):

$$\text{vect}\,\mathbf{q} = \left[q_1, q_2, q_3\right]^T, \tag{2.3}$$

представляющую собой трехмерный вектор.

Кватернион, имеющий только скалярную часть

$$\mathbf{q} = \left[q_0, 0, 0, 0\right], \tag{2.4}$$

называется чисто скалярным (scalar quaternion).

Кватернион, имеющий только векторную часть

$$\mathbf{q} = \left[0, q_1, q_2, q_3\right], \tag{2.5}$$

называется чисто векторным (right quaternion).

Для кватерниона определено несколько скалярных характеристик.

1. Норма (norm):

$$\left\|\mathbf{q}\right\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \tag{2.6}$$

2. Модуль (modulus):

$$\left|\mathbf{q}\right| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \tag{2.7}$$

3. Модуль векторной части:

$$\langle\mathbf{q}\rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \tag{2.8}$$

для обозначения которого будем использовать идентификатор кватерниона в угловых скобках.

4. Аргумент (argument, phase) – угловая величина, равная аргументу комплексного числа с действительной частью q_0 и мнимой частью $\langle\mathbf{q}\rangle$ (рис. 2.1). Ввиду того, что

модуль векторной части кватерниона – величина неотрицательная, аргумент принимает значения из замкнутого интервала [0, π].

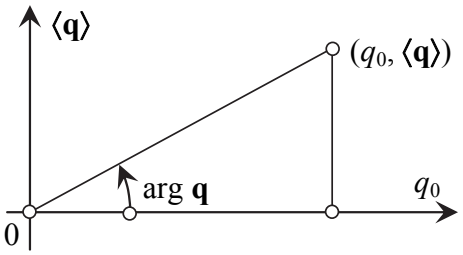


Рис. 2.1. К вопросу определения аргумента

Аргумент кватерниона обычно определяют формулой:

$$\arg \mathbf{q} = \arccos \frac{q_0}{|\mathbf{q}|}. \tag{2.9}$$

Однако эта формула плохо обусловлена вблизи краев интервала. Для вычислений лучше использовать встроенные функции arg(x + i·y) (комплексного числа) или atan2(x, y), имеющиеся во многих математических программах. Поэтому чаще будем пользоваться формулой:

$$\arg \mathbf{q} = \arg[q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle], \tag{2.10}$$

справедливой и при некоторых обобщениях характеристик кватернионов.

Как следует из формул (2.6) и (2.7), норма и модуль кватерниона равны нулю только для нулевого кватерниона, обозначаемого:

$$\mathbf{o} = [0,0,0,0]. \tag{2.11}$$

Аргумент нулевого кватерниона не определен.

5. Кватернион является нормированным (normed), если его норма равна единице. Версором (versor) или знаком (sign) кватерниона будем называть нормированный кватернион, полученный на его основе:

$$\operatorname{vers} \mathbf{q} = \operatorname{sgn} \mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}. \tag{2.12}$$

2.2. Операции над кватернионами

1. Кватернионное сопряжение (conjugating), обозначаемое чертой над идентификатором, определяется следующим образом:

$$\overline{\mathbf{q}} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]. \tag{2.13}$$

В результате кватернионного сопряжения получается кватернион.

2. Кватернионное сложение (addition), обозначаемое знаком "+", определяется формулой:

$$\mathbf{q}+\mathbf{p}=\begin{bmatrix} q_0+p_0 \\ q_1+p_1 \\ q_2+p_2 \\ q_3+p_3 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Как видно из нее, кватернионы складываются покомпонентно. В результате кватернионного сложения получается кватернион. Сложение кватернионов коммутативно.

Аналогично определяется и кватернионное вычитание (subtraction):

$$\mathbf{q}-\mathbf{p}=\begin{bmatrix} q_0-p_0 \\ q_1-p_1 \\ q_2-p_2 \\ q_3-p_3 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overline{\mathbf{p}+\mathbf{q}}=\overline{\mathbf{p}}+\overline{\mathbf{q}};\quad \overline{\mathbf{p}-\mathbf{q}}=\overline{\mathbf{p}}-\overline{\mathbf{q}}. \tag{2.16}$$

3. Умножение числа на кватернион или кватерниона на число, обозначаемое знаком "·", определяется формулой:

$$a\cdot\mathbf{q}=\mathbf{q}\cdot a=\begin{bmatrix} a\cdot q_0 \\ a\cdot q_1 \\ a\cdot q_2 \\ a\cdot q_3 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

В результате умножения числа на кватернион или кватерниона на число получается кватернион. Операция коммутативна.

4. Кватернионное умножение (quaternion multiplication, Grassmann multiplication), обозначаемое знаком "$\circ$", определяется формулой:

$$\mathbf{q}\circ\mathbf{p}=\begin{bmatrix} q_0\cdot p_0-q_1\cdot p_1-q_2\cdot p_2-q_3\cdot p_3 \\ q_0\cdot p_1+q_1\cdot p_0+q_2\cdot p_3-q_3\cdot p_2 \\ q_0\cdot p_2-q_1\cdot p_3+q_2\cdot p_0+q_3\cdot p_1 \\ q_0\cdot p_3+q_1\cdot p_2-q_2\cdot p_1+q_3\cdot p_0 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

В результате кватернионного умножения получается кватернион. Кватернионное умножение некоммутативно (noncommutative), т. е. его результат в общем случае

зависит от порядка сомножителей. Рассмотрим некоторые свойства кватернионного умножения.

Умножение кватернионов ассоциативно:

$$\mathbf{q}\circ\mathbf{p}\circ\mathbf{r}=(\mathbf{q}\circ\mathbf{p})\circ\mathbf{r}=\mathbf{q}\circ(\mathbf{p}\circ\mathbf{r}). \tag{2.19}$$

Умножение кватернионов дистрибутивно по отношению к суммированию:

$$\mathbf{q}\circ(\mathbf{p}+\mathbf{r})=\mathbf{q}\circ\mathbf{p}+\mathbf{q}\circ\mathbf{r};\quad(\mathbf{p}+\mathbf{r})\circ\mathbf{q}=\mathbf{p}\circ\mathbf{q}+\mathbf{r}\circ\mathbf{q}. \tag{2.20}$$

Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при циклической перестановке сомножителей:

$$\operatorname{scal}(\mathbf{p}\circ\mathbf{q}\circ\mathbf{r})=\operatorname{scal}(\mathbf{r}\circ\mathbf{p}\circ\mathbf{q})=\operatorname{scal}(\mathbf{q}\circ\mathbf{r}\circ\mathbf{p}). \tag{2.21}$$

В частности, скалярная часть произведения двух кватернионов не зависит от порядка сомножителей:

$$\operatorname{scal}(\mathbf{p}\circ\mathbf{q})=\operatorname{scal}(\mathbf{q}\circ\mathbf{p}). \tag{2.22}$$

Сопряженное значение от произведения двух кватернионов равно произведению их сопряженных значений, взятых в обратном порядке:

$$\overline{\mathbf{p}\circ\mathbf{q}}=\overline{\mathbf{q}}\circ\overline{\mathbf{p}}. \tag{2.23}$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\overline{\mathbf{p}\circ\mathbf{q}\circ\mathbf{r}\circ\mathbf{s}}=\overline{\mathbf{s}}\circ\overline{\mathbf{r}}\circ\overline{\mathbf{q}}\circ\overline{\mathbf{p}}. \tag{2.24}$$

Норма произведения двух кватернионов равна произведению норм сомножителей:

$$\|\mathbf{p}\circ\mathbf{q}\|=\|\mathbf{p}\|\cdot\|\mathbf{q}\|. \tag{2.25}$$

Это утверждение далеко не тривиально и представляет собой одно из замечательных свойств кватернионов. Еще в 1750 году, задолго до появления кватернионов, его доказал Л. Эйлер. Оно известно как тождество о четырех квадратах: произведение сумм четырех квадратов является суммой четырех квадратов.

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\|\mathbf{p}\circ\mathbf{q}\circ\mathbf{r}\circ\mathbf{s}\|=\|\mathbf{p}\|\cdot\|\mathbf{q}\|\cdot\|\mathbf{r}\|\cdot\|\mathbf{s}\|. \tag{2.26}$$

Единичным по умножению является тождественный (identical) кватернион:

$$\mathbf{i}=[1,0,0,0].\quad\mathbf{i}\circ\mathbf{q}=\mathbf{q}\circ\mathbf{i}=\mathbf{q}. \tag{2.27}$$

Умножение произвольного кватерниона на тождественный хоть справа, хоть слева не изменяет исходный кватернион.

Произведение (product) кватерниона на сопряженный ему выражается формулой:

$$\mathbf{q}\circ\overline{\mathbf{q}}=\overline{\mathbf{q}}\circ\mathbf{q}=\left[\|\mathbf{q}\|,0,0,0\right]=\|\mathbf{q}\|\cdot\mathbf{i}. \tag{2.28}$$

5. Представляют интерес еще две операции над кватернионами. Первая из них называется скалярным произведением (scalar product) и выражается формулой:

$$\mathbf{s} = \frac{\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{q} + \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{p}}{2} = \begin{bmatrix} p_0 \cdot q_0 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

В результате этой операции получается чисто скалярный кватернион, скалярная часть которого равна скалярному произведению кватернионов-сомножителей, если их рассматривать как четырехмерные векторы, а векторная часть равна нулю.

Вторая операция называется векторным произведением (vector cross product). Она выражается формулой:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

В результате этой операции получается чисто векторный кватернион, скалярная часть которого равна нулю, а векторная часть равна векторному произведению векторных частей кватернионов-сомножителей. Формулу (2.30) можно по-иному записать так:

$$\text{vect}\, \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \text{vect}\, \mathbf{p} \times \text{vect}\, \mathbf{q}. \tag{2.31}$$

Два кватерниона **p** и **q** называются коллинеарными, если коллинеарны их векторные части, то есть когда векторное произведение этих кватернионов равно нулевому кватерниону:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \mathbf{o}. \tag{2.32}$$

Из этой формулы следует, что коллинеарные кватернионы коммутируют при умножении.

6. Интересен результат умножения чисто векторных кватернионов:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 - p_3 \cdot q_3 \\ p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

В результате этой операции получается кватернион общего вида, скалярная часть которого равна скалярному произведению векторных частей сомножителей, взятому

с обратным знаком, а векторная часть равна векторному произведению векторных частей сомножителей.

На примере этой формулы можно с другой точки зрения оценить важность результата многолетних размышлений Гамильтона о правиле перемножения троек чисел или, по существу, трехмерных векторов. В векторной алгебре известны два вида умножения векторов: скалярное и векторное. Скалярное умножение дает в результате скаляр, а векторное умножение – вектор. Ни та, ни другая векторная операция Гамильтона не устраивала, поскольку по произведению и одному из сомножителей нельзя было восстановить второй сомножитель. Гамильтон придумал еще одно (кватернионное) правило умножения векторов, объединяющее два упомянутых выше правила. Необычным в этом правиле умножения было то, что в результате получалась не тройка, а четверка чисел – кватернион. Как видно из формулы (2.33), первое число из этой четверки – скалярное произведение (с обратным знаком), а оставшиеся три – векторное произведение. По этой информации, конечно, восстановить второй сомножитель можно. Правило кватернионного умножения, содержащееся в формуле (2.18), имеет более широкое применение, поскольку сомножителями могут быть не только тройки чисел – векторы, но и четверки чисел – кватернионы. Использование четверок чисел вместо троек оказалось настолько удачным, что использование кватернионов в алгоритмах для автоматических вычислительных машин экономит количество операций и время вычислений, что важно при выполнении расчетов в режиме реального времени. Четвертый элемент кватерниона является хранилищем промежуточных результатов вычислений.

7. Интересен также результат умножения кватернионов с двумя нулевыми векторными компонентами:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \cdot q_0 - p_1 \cdot q_1 \\ p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Из этой формулы вытекает, что кватернионы такого вида перемножаются как комплексные числа. В скалярной части кватерниона находится действительная часть, а в векторной части – мнимая часть комплексного числа. Так, если обозначить:

$$p = p_0 + i \cdot p_1; \quad q = q_0 + i \cdot q_1; \quad r = r_0 + i \cdot r_1, \tag{2.35}$$

то будет справедлива следующая формула:

$$p \cdot q = r. \tag{2.36}$$

8. Обращение (inversion) кватерниона, обозначаемое степенью минус единица, определяется формулой:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|}. \tag{2.37}$$

В результате умножения кватерниона на обратный (reciprocal) и справа, и слева, получаем тождественный кватернион:

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q} = \mathbf{i} \ . \tag{2.38}$$

Нормы и модули взаимно-обратных кватернионов взаимно-обратны:

$$\left\|\mathbf{q}^{-1}\right\| = \left\|\mathbf{q}\right\|^{-1}; \quad \left|\mathbf{q}^{-1}\right| = \left|\mathbf{q}\right|^{-1}. \tag{2.39}$$

Кватернион, обратный сопряженному, равен сопряженному от обратного кватерниона.

$$\overline{\mathbf{q}}^{-1} = \overline{\mathbf{q}^{-1}} \ , \tag{2.40}$$

то есть операции обращения и сопряжения перестановочны.

Обратное значение от произведения двух кватернионов равно произведению их обратных значений, взятых в обратном порядке:

$$\left(\mathbf{p} \circ \mathbf{q}\right)^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{p}^{-1}. \tag{2.41}$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\left(\mathbf{p} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{s}\right)^{-1} = \mathbf{s}^{-1} \circ \mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{p}^{-1}. \tag{2.42}$$

Интересны также формулы для суммы или разности двух обратных кватернионов:

$$\mathbf{p}^{-1} \pm \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ (\mathbf{q} \pm \mathbf{p}) \circ \mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^{-1} \circ (\mathbf{q} \pm \mathbf{p}) \circ \mathbf{q}^{-1}. \tag{2.43}$$

Другие интересные формулы:

$$\mathbf{p}^3 + \mathbf{q}^3 + \mathbf{r}^3 = \mathbf{p} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{r} + \mathbf{q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{p} + \mathbf{r} \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}, \text{ где } \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{o}. \tag{2.44}$$

2.3. Представление кватернионов матрицами

Известно, что существует изоморфизм между кватернионами $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ и квадратными матрицами четвертого порядка специального вида

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

в отношении кватернионных и матричных операций. Так кватерниону **q** соответствует матрица **Q** вида (2.45), единичному кватерниону – единичная матрица, нулевому кватерниону – нулевая матрица, сопряженному кватерниону – транспонированная матрица, обратному кватерниону – обратная матрица; сложению кватернионов соответствует сложение матриц, умножению кватернионов – умножение матриц, умножению кватерниона на число – умножение матрицы на число; функции

кватерниона – одноименная функция матрицы. Этот изоморфизм позволяет перенести закономерности, имеющие место для матриц, на кватернионы, и наоборот.

Рассмотрим некоторые свойства матриц вида (2.45).

Детерминант этой матрицы выражается формулой:

$$\det \mathbf{Q} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2 = |\mathbf{q}|^4, \tag{2.46}$$

где $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ – модуль кватерниона.

Обратная матрица выражается формулой:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\mathbf{Q}^T}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \frac{\mathbf{Q}^T}{|\mathbf{q}|^2}. \tag{2.47}$$

Собственные числа этой матрицы комплексно-сопряженные, двукратные:

$$q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle; \quad q_0 - i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle, \tag{2.48}$$

где $\langle \mathbf{q} \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ – модуль векторной части кватерниона.

Собственным вектором матрицы **Q,** соответствующим собственному значению $q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle$, является любой из столбцов следующей матрицы:

$$\mathbf{V}^+ = \begin{bmatrix} -i \cdot \langle q \rangle & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & -i \cdot \langle q \rangle & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & -i \cdot \langle q \rangle & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & -i \cdot \langle q \rangle \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

В этом можно убедиться, вычисляя произведение матриц и проверяя равенство:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}^+ = \left[q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle \right] \cdot \mathbf{V}^+. \tag{2.50}$$

Собственным вектором матрицы **Q,** соответствующим собственному значению $q_0 - i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle$, является любой из столбцов следующей матрицы:

$$\mathbf{V}^- = \begin{bmatrix} i \cdot \langle q \rangle & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & i \cdot \langle q \rangle & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & i \cdot \langle q \rangle & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & i \cdot \langle q \rangle \end{bmatrix}. \tag{2.51}$$

В этом можно убедиться, вычисляя произведение матриц и проверяя равенство:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}^- = \left[q_0 - i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle \right] \cdot \mathbf{V}^-. \tag{2.52}$$

Столбцы матриц $\mathbf{V}^+$ и $\mathbf{V}^-$ не являются линейно независимыми, поскольку ранг этих матриц равен 2.

2.4. Кватернионные функции

2.4.1. Представление кватерниона с явным указанием направления векторной части

В кватернионном анализе распространенными являются операции с коллинеарными кватернионами. При работе с множеством коллинеарных кватернионов удобно зафиксировать направление векторной части этого множества, задав сонаправленный ей единичный вектор **e** с компонентами e_1, e_2, e_3, который будет константой при всех преобразованиях, а переменными оставить два числа – скалярную часть q_0 и величину векторной части кватерниона $q_\bullet$. Компоненты единичного вектора, естественно, обладают свойством:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \tag{2.53}$$

С учетом этого кватернион $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ можно представить пятью числами: e_1, e_2, e_3, q_0, $q_\bullet$, притом двумя различными способами:

$$e_1 = \frac{q_1}{q_\bullet}; e_2 = \frac{q_2}{q_\bullet}; e_3 = \frac{q_3}{q_\bullet}; \quad q_\bullet = \pm\langle \mathbf{q} \rangle. \tag{2.54}$$

Знак для $q_\bullet$ в формуле (2.54) можно выбрать произвольно. Важно, чтобы компоненты векторной части кватерниона выражались формулами:

$$q_1 = e_1 \cdot q_\bullet; \quad q_2 = e_2 \cdot q_\bullet; \quad q_3 = e_3 \cdot q_\bullet. \tag{2.55}$$

Использование привязки к направлению векторной части кватерниона в ряде случаев позволяет получить более простые формулы и избежать дополнительных оговорок в части знаков компонентов. Это объясняется тем, что в формулах с привязкой к направлению векторной части вместо неотрицательной величины $\langle \mathbf{q} \rangle$ используется величина векторной части $q_\bullet$, которая может быть как положительной, так и отрицательной. При этом формулы оказываются верными при любом знаке $q_\bullet$.

Варьируя q_0 и $q_\bullet$ от $-\infty$ до $+\infty$ при фиксированных e_1, e_2, e_3, получим исчерпывающее множество кватернионов, коллинеарных направлению **e** и, естественно, коллинеарных между собой. Это множество кватернионов содержит в себе сонаправленные ($q_\bullet > 0$), противонаправленные ($q_\bullet < 0$) и чисто скалярный кватернион ($q_\bullet = 0$), который можно считать коллинеарным любому направлению.

2.4.2. Аналитические функции кватерниона

Рассмотрим функцию, аргументом которой является кватернион и значением которой является тоже кватернион. Будем полагать, что эта функция задана, если заданы функциональные зависимости, выражающие компоненты кватерниона-функции через компоненты кватерниона-аргумента. Если **F**(**q**) – кватернион-функция, а **q** – кватернион-аргумент, то функциональная зависимость между этими кватернионами может быть задана четырьмя функциями от четырех переменных:

$$F_0 = f_0(q_0, q_1, q_2, q_3); F_1 = f_1(q_0, q_1, q_2, q_3); F_2 = f_2(q_0, q_1, q_2, q_3); F_3 = f_3(q_0, q_1, q_2, q_3). \tag{2.56}$$

Аргументами и функциями в зависимостях (2.56) являются действительные числа.

Аналитической называют функцию, которую можно представить суммой степенного ряда (ряда Тейлора) в окрестности любой точки ее определения. При вычислении суммы степенного ряда используются только операции сложения и умножения. Такие операции определены и для кватернионов. Это дает принципиальную возможность построения аналитических кватернионных функций.

Заметим, что сумма коллинеарных кватернионов коллинеарна слагаемым; произведение коллинеарных кватернионов – коллинеарно сомножителям. В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Отсюда вытекает, что сумма степенного ряда от одного кватерниона коллинеарна этому кватерниону. Следовательно, аналитическая функция кватерниона, если она существует, коллинеарна кватерниону-аргументу.

Пусть мы имеем два коллинеарных кватерниона, заданные с явным указанием одного и того же направления векторной части: **q1** = [$q1_0$, $e_1 \cdot q1_\bullet$, $e_2 \cdot q1_\bullet$, $e_3 \cdot q1_\bullet$] и **q2** = [$q2_0$, $e_1 \cdot q2_\bullet$, $e_2 \cdot q2_\bullet$, $e_3 \cdot q2_\bullet$]. Рассмотрим сумму **qs** = [qs_0, $e_1 \cdot qs_\bullet$, $e_2 \cdot qs_\bullet$, $e_3 \cdot qs_\bullet$] и произведение **qp** = [qp_0, $e_1 \cdot qp_\bullet$, $e_2 \cdot qp_\bullet$, $e_3 \cdot qp_\bullet$] этих кватернионов. Выполняя операции над кватернионами по формальным правилам, получаем:

$$qs_0 = q1_0 + q2_0;\ qs_\bullet = q1_\bullet + q2_\bullet;\ qp_0 = q1_0 \cdot q2_0 - q1_\bullet \cdot q2_\bullet;\ qp_\bullet = q1_0 \cdot v2_\bullet + q2_0 \cdot v1_\bullet . \quad (2.57)$$

Нетрудно заметить, что величины скалярных частей кватернионов ведут себя как действительные части комплексного числа, а величины векторных частей кватернионов ведут себя как мнимые части комплексного числа. Действительно,

$$\begin{gathered}\left(q1_0 + i \cdot q1_\bullet\right) + \left(q2_0 + i \cdot q2_\bullet\right) = \left(q1_0 + q2_0\right) + i \cdot \left(q1_\bullet + q2_\bullet\right) = qs_0 + i \cdot qs_\bullet; \\ \left(q1_0 + i \cdot q1_\bullet\right) \cdot \left(q2_0 + i \cdot q2_\bullet\right) = \left(q1_0 \cdot q2_0 - q1_\bullet \cdot q2_\bullet\right) + i \cdot \left(q1_0 \cdot q2_\bullet + q2_0 \cdot q1_\bullet\right) = qp_0 + i \cdot qp_\bullet .\end{gathered} \quad (2.58)$$

Из этого можно сделать вывод о том, что аналитические функции кватерниона можно строить как комплексные аналитические функции. По известной комплексной аналитической функции f можно построить аналитическую кватернионную функцию **f(q)**. Если положить **q** = [q_0, $e_1 \cdot q_\bullet$, $e_2 \cdot q_\bullet$, $e_3 \cdot q_\bullet$]; **f(q)** = [f_0, $e_1 \cdot f_\bullet$, $e_2 \cdot f_\bullet$, $e_3 \cdot f_\bullet$], то для построения аналитической кватернионной функции можно воспользоваться зависимостями:

$$f_0 + i \cdot f_\bullet = f(q_0 + i \cdot q_\bullet) \quad (2.59)$$

или

$$f_0 = \operatorname{Re} f(q_0 + i \cdot q_\bullet); \quad f_\bullet = \operatorname{Im} f(q_0 + i \cdot q_\bullet) . \quad (2.60)$$

В формулах (2.58)–(2.60) i – мнимая единица; Re – действительная часть комплексного числа; Im – мнимая часть комплексного числа.

Как следует из формулы (2.54), кватернион **q** можно представить при помощи пяти чисел двумя способами – и как q_0, e_1, e_2, e_3, $q_\bullet$, и как q_0, $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$, $-q_\bullet$. Естественно потребовать, чтобы независимо от формы представления, одному и тому же аргументу соответствовала бы одна и та же функция. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$f_0 - i \cdot f_\bullet = f(q_0 - i \cdot q_\bullet). \tag{2.61}$$

Как следует из работы [52], для соблюдения условий (2.61) функция F как функция комплексной переменной должна принимать на действительной оси действительные значения или, что то же самое, быть аналитическим продолжением на комплексную плоскость аналитической функции действительной переменной, заданной на действительной оси. При этом формулы (2.60) можно представить в следующем виде:

$$f_0 = \frac{f(q_0 + i \cdot q_\bullet) + f(q_0 - i \cdot q_\bullet)}{2}; \quad f_\bullet = \frac{f(q_0 + i \cdot q_\bullet) - f(q_0 - i \cdot q_\bullet)}{2 \cdot i}. \tag{2.62}$$

Таким образом, аналитическая функция действительной переменной порождает аналитическую кватернионную функцию. Естественно кватернионную функцию, полученную таким образом, назвать именем породившей ее аналитической функции действительной переменной.

Выражения для f_0 и $f_\bullet$ для наиболее употребительных аналитических функций кватернионного аргумента приведены в приложении 9.1.

2.5. Дифференцирование кватернионных функций

2.5.1. Дифференцирование аналитических функций кватерниона

Пусть имеем кватернион **q** и дифференциал этого кватерниона **dq** с компонентами:

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]; \quad \mathbf{dq} = [dq_0, dq_1, dq_2, dq_3]. \tag{2.63}$$

Пусть задана функция этого кватерниона **f**(**q**), то есть, заданы функциональные зависимости, выражающие компоненты кватерниона-функции через компоненты кватерниона-аргумента. Таким образом, речь идет о четырех скалярных функциях от четырех скалярных аргументов:

$$f_i(q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{2.64}$$

Требуется выразить дифференциал кватерниона-функции **df** через дифференциал кватерниона-аргумента **dq**. В покомпонентной записи результат выглядит так:

$$df_i = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \cdot dq_j \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{2.65}$$

Рассмотрим аналитическую функцию кватерниона, которая, как известно, коллинеарна своему аргументу. Если кватернион-аргумент представить в виде:

$$\mathbf{q} = [q_0, e_1 \cdot q_\bullet, e_2 \cdot q_\bullet, e_3 \cdot q_\bullet], \tag{2.66}$$

то кватернион-функцию можно будет представить в виде

$$\mathbf{f} = [f_0, e_1 \cdot f_\bullet, e_2 \cdot f_\bullet, e_3 \cdot f_\bullet], \tag{2.67}$$

а кватернион-производную от этой функции – в виде:

$$\mathbf{d} = [d_0, e_1 \cdot d_\bullet, e_2 \cdot d_\bullet, e_3 \cdot d_\bullet], \tag{2.68}$$

где:

$$f_0 = \frac{f(\lambda)+f(\bar{\lambda})}{2};\ f_\bullet = \frac{f(\lambda)-f(\bar{\lambda})}{2\cdot i};\ d_0 = \frac{f'(\lambda)+f'(\bar{\lambda})}{2};\ d_\bullet = \frac{f'(\lambda)-f'(\bar{\lambda})}{2\cdot i};$$
$$\lambda = q_0 + i\cdot q_\bullet;\quad \bar{\lambda} = q_0 - i\cdot q_\bullet; \tag{2.69}$$

i – мнимая единица.

Функция **d**(**q**) является аналитической функцией-производной от изучаемой функции **f**(**q**). Например, если **f**(**q**) = **q**^{2}, то **d**(**q**) = 2·**q**, если **f**(**q**) = sin(**q**), то **d**(**q**) = cos(**q**).

В этом случае соотношения (2.65) в матрично-векторной форме будут иметь вид:

$$\begin{bmatrix} df_0 \\ df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 & -e_1\cdot d_\bullet & -e_2\cdot d_\bullet & -e_3\cdot d_\bullet \\ e_1\cdot d_\bullet & T-e_1^2\cdot(T-d_0) & -e_1\cdot e_2\cdot(T-d_0) & -e_1\cdot e_3\cdot(T-d_0) \\ e_2\cdot d_\bullet & -e_2\cdot e_1\cdot(T-d_0) & T-e_2^2\cdot(T-d_0) & -e_2\cdot e_3\cdot(T-d_0) \\ e_3\cdot d_\bullet & -e_3\cdot e_1\cdot(T-d_0) & -e_3\cdot e_2\cdot(T-d_0) & T-e_3^2\cdot(T-d_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}, \tag{2.70}$$

где

$$T = f_\bullet / q_\bullet . \tag{2.71}$$

Зависимость (2.70) может быть представлена и в другом виде:

$$\begin{bmatrix} df_0 \\ df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{bmatrix} = T\cdot\begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K & -e_1\cdot g & -e_2\cdot g & -e_3\cdot g \\ e_1\cdot g & e_1\cdot e_1\cdot K & e_1\cdot e_2\cdot K & e_1\cdot e_3\cdot K \\ e_2\cdot g & e_2\cdot e_1\cdot K & e_2\cdot e_2\cdot K & e_2\cdot e_3\cdot K \\ e_3\cdot g & e_3\cdot e_1\cdot K & e_3\cdot e_2\cdot K & e_3\cdot e_3\cdot K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}, \tag{2.72}$$

где

$$T = f_\bullet / q_\bullet;\quad K = f_\bullet / q_\bullet - d_0;\quad g = d_\bullet . \tag{2.73}$$

Зависимости, обратные (2.70) или (2.72), имеют вид:

$$\begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} = To\cdot\begin{bmatrix} df_0 \\ df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Ko & -e_1\cdot go & -e_2\cdot go & -e_3\cdot go \\ e_1\cdot go & e_1\cdot e_1\cdot Ko & e_1\cdot e_2\cdot Ko & e_1\cdot e_3\cdot Ko \\ e_2\cdot go & e_2\cdot e_1\cdot Ko & e_2\cdot e_2\cdot Ko & e_2\cdot e_3\cdot Ko \\ e_3\cdot go & e_3\cdot e_1\cdot Ko & e_3\cdot e_2\cdot Ko & e_3\cdot e_3\cdot Ko \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} df_0 \\ df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{bmatrix}, \tag{2.74}$$

где

$$To = \frac{1}{T};\quad Ko = \frac{1}{T} - \frac{d_0}{d_0^2 + d_\bullet^2};\quad go = -\frac{d_\bullet}{d_0^2 + d_\bullet^2} . \tag{2.75}$$

2.5.2. Кватернионное представление зависимостей для дифференциалов

При выводе формул и выполнении расчетов всегда бывает полезным представить исходные данные и результаты в виде кватернионов, а математические зависимости между ними представить в виде кватернионных операций.

С использованием кватернионных операций зависимость (2.70) можно записать так:

$$\mathbf{df} = \frac{(\mathbf{d}-\mathbf{V})\circ\mathbf{dq}+\mathbf{dq}\circ(\mathbf{d}-\mathbf{V})}{2}+\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\circ\mathbf{dq}\circ\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.76}$$

где

$$\mathbf{V} = \left[d_0; e_1\cdot\sqrt{T^2-d_0^2}; e_2\cdot\sqrt{T^2-d_0^2}; e_3\cdot\sqrt{T^2-d_0^2}\right]. \tag{2.77}$$

Эту же формулу можно представить в виде произведения модуля на верзор кватерниона:

$$\mathbf{V} = T\cdot\left[\cos\theta; e_1\cdot\sin\theta; e_2\cdot\sin\theta; e_3\cdot\sin\theta\right], \tag{2.78}$$

где

$$\theta = \arg\left(\frac{d_0}{T}+i\cdot\frac{\sqrt{T^2-d_0^2}}{T}\right). \tag{2.79}$$

Квадратный корень из этого кватерниона может быть вычислен по формуле (9.10):

$$\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} = \left[\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}; e_1\cdot\sqrt{\frac{T-d_0}{2}}; e_2\cdot\sqrt{\frac{T-d_0}{2}}; e_3\cdot\sqrt{\frac{T-d_0}{2}}\right]. \tag{2.80}$$

Другая формула для квадратного корня выглядит так:

$$\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|T|}\cdot\left[\cos\frac{\theta}{2}; e_1\cdot\sin\frac{\theta}{2}; e_2\cdot\sin\frac{\theta}{2}; e_3\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right]. \tag{2.81}$$

Следует отметить, что формула справедлива при $-\pi < q_\bullet < \pi$. За пределами этого диапазона использование формулы требует дополнительного анализа. При $q_\bullet = 0$ все функции непрерывны.

Решение может быть представлено также в форме:

$$\mathbf{dF} = \frac{\mathbf{A}\circ\mathbf{dq}\circ\mathbf{B}+\mathbf{B}\circ\mathbf{dq}\circ\mathbf{A}}{2}, \tag{2.82}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left[\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}; e_1\cdot\frac{d_\bullet-\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}}; e_2\cdot\frac{d_\bullet-\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}}; e_3\cdot\frac{d_\bullet-\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}}\right];\\
\mathbf{B} &= \left[\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}; e_1\cdot\frac{d_\bullet+\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}}; e_2\cdot\frac{d_\bullet+\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}}; e_3\cdot\frac{d_\bullet+\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{T+d_0}{2}}}\right];
\end{aligned} \tag{2.83}$$

$$T = f_\bullet/q_\bullet. \tag{2.84}$$

Кватернионы **A** и **B** можно представить следующим образом:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot(T+d_0)}}\left[d_0+T;\, e_1\cdot\left(d_\bullet-\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}\right);\, e_2\cdot\left(d_\bullet-\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}\right);\, e_3\cdot\left(d_\bullet-\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}\right)\right];$$
$$\mathbf{B}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot(T+d_0)}}\left[d_0+T;\, e_1\cdot\left(d_\bullet+\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}\right);\, e_2\cdot\left(d_\bullet+\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}\right);\, e_3\cdot\left(d_\bullet+\sqrt{|\mathbf{d}|^2-T^2}\right)\right]. \quad (2.85)$$

2.5.3. Разложение кватерниона по заданному направлению

Рассмотрим произвольный кватернион **a** и произвольное направление в трехмерном пространстве, заданное направляющими косинусами e_1, e_2, e_3. Разумеется,

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=1. \quad (2.86)$$

Кватернион **a** можно представить в виде суммы двух кватернионов:

$$\mathbf{a}=\mathbf{ac}+\mathbf{an}, \quad (2.87)$$

первый из которых коллинеарен заданному направлению и выражается формулой:

$$\mathbf{ac}=\left[a_0, e_1\cdot a_\otimes, e_2\cdot a_\otimes, e_3\cdot a_\otimes\right], \quad (2.88)$$

где

$$a_\otimes=e_1\cdot a_1+e_2\cdot a_2+e_3\cdot a_3, \quad (2.89)$$

а второй (чисто векторный) нормален ему:

$$\mathbf{an}=\mathbf{a}-\mathbf{ac}. \quad (2.90)$$

Можно использовать также легко проверяемые кватернионные формулы:

$$\mathbf{ac}=\frac{\mathbf{a}-\mathbf{e}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{e}}{2};\quad \mathbf{an}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{e}\circ\mathbf{a}\circ\mathbf{e}}{2}, \quad (2.91)$$

где **e** – чисто векторный кватернион с компонентами [0, e_1, e_2, e_3].

2.5.4. Производная Гато

Производная Гато кватернионной функции определяется согласно формуле:

$$\partial\mathbf{f}(\mathbf{q})(\mathbf{a})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{q}+\Delta t\cdot\mathbf{a})-\mathbf{f}(\mathbf{q})}{\Delta t}, \quad (2.92)$$

где **q** – кватернион-аргумент, **f**(**q**) – кватернион-функция, ∂**f**(**q**)(**a**) – кватернион-производная, **a** – заданный постоянный кватернион, Δt – действительная переменная.

Если в соответствии с правилами раздела 2.5.3 кватернион **a** представить в виде суммы двух кватернионов:

$$\mathbf{a}=\mathbf{ac}+\mathbf{an}, \quad (2.93)$$

первый из которых коллинеарен кватерниону-аргументу **q**, а второй нормален ему, то с их помощью формула (2.92) может быть записана следующим образом:

$$\partial\mathbf{f}(\mathbf{q})(\mathbf{a}) = \mathbf{d}(\mathbf{q}) \circ \mathbf{ac} + T \cdot \mathbf{an}, \tag{2.94}$$

где $\mathbf{d}(\mathbf{q})$ – аналитическая функция-производная от функции $\mathbf{f}(\mathbf{q})$; T определяется формулой (2.71) и для различных аналитических функций приводится в разделе 9.2.

Если представить кватернионы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{a}$ в виде:

$$\mathbf{q} = \left[q_0, e_1 \cdot q_\bullet, e_2 \cdot q_\bullet, e_3 \cdot q_\bullet\right]; \quad \mathbf{a} = \left[a_0, c_1 \cdot a_\bullet, c_2 \cdot a_\bullet, c_3 \cdot a_\bullet\right], \tag{2.95}$$

где e_i, c_i (i = 1, 2, 3) – направляющие косинусы векторных частей кватернионов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{a}$ соответственно, то кватернион производной Гато можно представить следующим образом:

$$\partial\mathbf{f}(\mathbf{q})(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} d_0 \cdot a_0 - C \cdot d_\bullet \cdot a_\bullet \\ e_1 \cdot (d_\bullet \cdot a_0 + C \cdot d_0 \cdot a_\bullet) + (c_1 - C \cdot e_1) \cdot T \cdot a_\bullet \\ e_2 \cdot (d_\bullet \cdot a_0 + C \cdot d_0 \cdot a_\bullet) + (c_2 - C \cdot e_2) \cdot T \cdot a_\bullet \\ e_3 \cdot (d_\bullet \cdot a_0 + C \cdot d_0 \cdot a_\bullet) + (c_3 - C \cdot e_3) \cdot T \cdot a_\bullet \end{bmatrix}, \tag{2.96}$$

где C – косинус угла между векторами кватернионов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{a}$, вычисляемый по формуле:

$$C = e_1 \cdot c_1 + e_2 \cdot c_2 + e_3 \cdot c_3, \tag{2.97}$$

а D_0, $D_\bullet$ и T для основных аналитических функций приведены в приложении 9.2.

2.5.5. Связь между компонентами дифференциалов аргумента и функции

Формула (2.70) выражает зависимость между компонентами дифференциала аргумента **dq** и дифференциала аналитической функции **df**. Представим эти дифференциалы разложенными на два слагаемых в соответствии с направлением, связанным с аргументом $\mathbf{q}$ и имеющим направляющие косинусы e_1, e_2, e_3:

$$\mathbf{dq} = \mathbf{dqc} + \mathbf{dqn}; \quad \mathbf{df} = \mathbf{dfc} + \mathbf{dfn}, \tag{2.98}$$

причем

$$\mathbf{dqc} = \left[dq_0, e_1 \cdot dq_\otimes, e_2 \cdot dq_\otimes, e_3 \cdot dq_\otimes\right]; \quad \mathbf{dfc} = \left[df_0, e_1 \cdot df_\otimes, e_2 \cdot df_\otimes, e_3 \cdot df_\otimes c\right], \tag{2.99}$$

где

$$dq_\otimes = e_1 \cdot dq_1 + e_2 \cdot dq_2 + e_3 \cdot dq_3; \quad df_\otimes = e_1 \cdot df_1 + e_2 \cdot df_2 + e_3 \cdot df_3. \tag{2.100}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что справедливы зависимости:

$$\mathbf{dfc} = \mathbf{d} \circ \mathbf{dqc}; \quad \mathbf{dfn} = T \cdot \mathbf{dqn}, \tag{2.101}$$

эквивалентные зависимостям (2.70). Обозначения такие же, как в разделе 2.5.

Справедливы и обратные зависимости:

$$\mathbf{dqc} = \mathbf{d}^{-1} \circ \mathbf{dfc}; \quad \mathbf{dqn} = T^{-1} \cdot \mathbf{dfn}, \tag{2.102}$$

эквивалентные векторно-матричной формуле (2.74). Здесь $\mathbf{d}^{-1}$ – кватернион, обратный кватерниону $\mathbf{d}$, T^{-1} – число, обратное числу T.

Таким образом, вместо использования формул (2.70), можно разложить дифференциал аргумента **dq** на составляющие **dqc** и **dqn** и воспользоваться кватернионными формулами (2.101) для получения двух составляющих дифференциала функции **dfc** и **dfn**. Такой подход может оказаться удобным при выполнении аналитических преобразований.

Для некоторых функций зависимости дифференциала функции от дифференциала аргумента выражаются простыми формулами. Ниже приведены примеры.

Для квадратной функции $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2$:

$$\mathbf{df} = \mathbf{q} \circ \mathbf{dq} + \mathbf{dq} \circ \mathbf{q}. \tag{2.103}$$

Для кубической функции $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^3$:

$$\mathbf{df} = \mathbf{q}^2 \circ \mathbf{dq} + \mathbf{q} \circ \mathbf{dq} \circ \mathbf{q} + \mathbf{dq} \circ \mathbf{q}^2. \tag{2.104}$$

Для обратной функции $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-1}$:

$$\mathbf{df} = -\mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{dq} \circ \mathbf{q}^{-1}. \tag{2.105}$$

2.5.6. Производные скалярных функций кватерниона

Будем рассматривать следующие скалярные функции кватернионного аргумента **q**:

scal(**q**) – скалярная часть кватерниона; $\|\mathbf{q}\|$ – норма кватерниона; $|\mathbf{q}|$ – модуль кватерниона; $\langle \mathbf{q} \rangle$ – модуль векторной части кватерниона; arg(**q**) – аргумент кватерниона, определенные в разделе 2.1.

Во многих задачах возникает необходимость дифференцировать скалярную функцию кватернионного аргумента по кватерниону (точнее, по компонентам кватерниона). Результат такого дифференцирования может быть представлен в форме кватерниона.

Если $f(\mathbf{q}) = f(q_0, q_1, q_2, q_3)$ – скалярная функция кватернионного аргумента **q**, то производную от этой функции по аргументу **q** будем полагать кватернионом со следующими компонентами:

$$\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \left[\frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_0}; \frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_1}; \frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_2}; \frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_3} \right]. \tag{2.106}$$

При таком представлении полный дифференциал скалярной функции кватерниона можно вычислять по формуле:

$$df(\mathbf{q}) = \mathrm{scal}\left(\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \circ \overline{\mathbf{dq}} \right), \tag{2.107}$$

где **dq** – дифференциал кватерниона, определенный в формуле (2.63).

Приведем формулы для производных скалярных функций кватерниона.

1. Производная от скалярной части кватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathrm{scal}(\mathbf{q}) = \mathbf{i}, \tag{2.108}$$

где **i** – единичный кватернион.

2. Производная от нормы кватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\|\mathbf{q}\| = 2\cdot\mathbf{q}\,. \tag{2.109}$$

3. Производная от модуля кватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}|\mathbf{q}| = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}. \tag{2.110}$$

4. Производная от модуля векторной части

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\langle\mathbf{q}\rangle = \left[0; \frac{q_1}{\langle\mathbf{q}\rangle}; \frac{q_2}{\langle\mathbf{q}\rangle}; \frac{q_3}{\langle\mathbf{q}\rangle}\right] = \frac{\mathbf{q}-\overline{\mathbf{q}}}{2\cdot\langle\mathbf{q}\rangle}. \tag{2.111}$$

5. Производная от аргумента кватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\arg(\mathbf{q}) = \left[-\frac{\langle\mathbf{q}\rangle}{\|\mathbf{q}\|}; \frac{q_1}{\langle\mathbf{q}\rangle}\cdot\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}; \frac{q_2}{\langle\mathbf{q}\rangle}\cdot\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}; \frac{q_3}{\langle\mathbf{q}\rangle}\cdot\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}\right]. \tag{2.112}$$

6. Производная от скалярной части произведения кватернионов

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{p}}\circ\mathbf{q}) = \mathbf{p}\,; \tag{2.113}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{p}}\circ\mathbf{q}^{-1}) = -\overline{\mathbf{q}}^{-1}\circ\mathbf{p}\circ\overline{\mathbf{q}}^{-1} = -\frac{\mathbf{q}\circ\mathbf{p}\circ\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^2}\,; \tag{2.114}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{p}}\circ\mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}\circ(\mathbf{q}^{-1}\circ\overline{\mathbf{v}}\circ\mathbf{q}\circ\mathbf{p}-\mathbf{p}\circ\mathbf{q}^{-1}\circ\overline{\mathbf{v}}\circ\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{(\overline{\mathbf{v}}\circ\mathbf{q}\circ\mathbf{p}\circ\mathbf{q}^{-1}-\mathbf{q}\circ\mathbf{p}\circ\mathbf{q}^{-1}\circ\overline{\mathbf{v}})\circ\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}\,; \tag{2.115}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{p}}\circ\mathbf{q}\circ\mathbf{v}\circ\mathbf{q}^{-1}) = \frac{(\mathbf{p}\circ\mathbf{q}\circ\overline{\mathbf{v}}\circ\mathbf{q}^{-1}-\mathbf{q}\circ\overline{\mathbf{v}}\circ\mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{p})\circ\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{\mathbf{q}\circ(\mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{p}\circ\mathbf{q}\circ\overline{\mathbf{v}}-\overline{\mathbf{v}}\circ\mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{p}\circ\mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|}. \tag{2.116}$$

Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при замене этого произведения сопряженной величиной и при циклической перестановке сомножителей.

2.6. Кватернионные функции вещественной переменной

2.6.1. Аддитивные производная и интеграл кватернионной функции вещественной переменной

Рассмотрим случай, когда кватернион **q** является функцией вещественной переменной *t*. Естественно определить аддитивную (или обычную) производную кватерниона **q**(*t*) по вещественной переменной *t* следующим образом:

$$\mathbf{q}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\mathbf{q}(t+\Delta t)-\mathbf{q}(t)}{\Delta t}\right] = \left[\frac{dq_0(t)}{dt}, \frac{dq_1(t)}{dt}, \frac{dq_2(t)}{dt}, \frac{dq_3(t)}{dt}\right]. \qquad (2.117)$$

Как видно из формулы, производная кватерниона является кватернионом.

Атрибут "аддитивные" по отношению к производной и интегралу в названии этого раздела поставлен для того, чтобы отличить эти понятия от мультипликативных производной и интеграла, которым посвящен следующий раздел.

Правила дифференцирования кватернионных функций очень похожи на правила дифференцирования обычных функций. Основное правило содержится в формуле (2.117), которая сводит задачу дифференцирования кватернионной функции к задаче дифференцирования вещественных функций. Если кватернионная функция, которую надо продифференцировать, получена по простому правилу из других кватернионных функций, производные которых известны, можно пользоваться следующими формулами:

$$\begin{gathered}\left[\alpha \cdot \mathbf{v}(t)\right]' = \alpha \cdot \mathbf{v}'(t); \quad \left[\boldsymbol{\alpha} \circ \mathbf{v}(t)\right]' = \boldsymbol{\alpha} \circ \mathbf{v}'(t); \quad \left[\mathbf{v}(t) \circ \boldsymbol{\alpha}\right]' = \mathbf{v}'(t) \circ \boldsymbol{\alpha}; \\ \left[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\right]' = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t); \quad \left[\mathbf{u}(t) \circ \mathbf{v}(t)\right]' = \mathbf{u}'(t) \circ \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \circ \mathbf{v}'(t),\end{gathered} \qquad (2.118)$$

где α – вещественная константа; $\boldsymbol{\alpha}$ – постоянный кватернион; $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ – кватернионные функции вещественной переменной t; $\mathbf{u}'(t)$, $\mathbf{v}'(t)$ – их производные по переменной t.

Рассмотрим сложную кватернионную функцию $\mathbf{f}[\mathbf{q}(t)]$, причем функция $\mathbf{f}$ является аналитической функцией кватернионного аргумента $\mathbf{q}$. Если внутренняя функция $\mathbf{q}(t)$ является функцией вещественной переменной t, то и функция $\mathbf{f}[\mathbf{q}(t)]$ тоже будет функцией t. Требуется найти производную по t функции $\mathbf{f}[\mathbf{q}(t)]$.

Выполняя дифференцирование зависимостей (2.64) и сопоставляя результаты с формулами (2.92)–(2.94), приходим к выводу о том, что:

$$\mathbf{f}'\left[\mathbf{q}(t)\right] = \partial\mathbf{f}\left[\mathbf{q}(t)\right]\left[\mathbf{q}'(t)\right]; \qquad (2.119)$$

то есть, производная по t от функции $\mathbf{f}[\mathbf{q}(t)]$ равна ее производной Гато (см. раздел 2.5.4), если в качестве постоянного кватерниона $\mathbf{a}$ в формуле (2.92) выступает производная по t от внутренней функции $\mathbf{q}(t)$.

Для практического вычисления производной внешней функции через производную внутренней функции можно пользоваться формулой (2.70), которая выражает компоненты кватерниона-производной внешней функции через компоненты кватерниона-производной внутренней функции в матрично-векторной форме:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}', \qquad (2.120)$$

где кватернионы-производные $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{q}'$ рассматриваются как векторы-столбцы, а $\mathbf{B}$ – как квадратная матрица четвертого порядка. Матрица $\mathbf{B}$ без труда просматривается в составе формулы (2.70):

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} d_0 & -e_1\cdot d_\bullet & -e_2\cdot d_\bullet & -e_3\cdot d_\bullet \\ e_1\cdot d_\bullet & T-e_1^2\cdot(T-d_0) & -e_1\cdot e_2\cdot(T-d_0) & -e_1\cdot e_3\cdot(T-d_0) \\ e_2\cdot d_\bullet & -e_2\cdot e_1\cdot(T-d_0) & T-e_2^2\cdot(T-d_0) & -e_2\cdot e_3\cdot(T-d_0) \\ e_3\cdot d_\bullet & -e_3\cdot e_1\cdot(T-d_0) & -e_3\cdot e_2\cdot(T-d_0) & T-e_3^2\cdot(T-d_0) \end{bmatrix}, \tag{2.121}$$

где q_0 и $q_\bullet$; f_0 и $f_\bullet$; d_0 и $d_\bullet$ – компоненты кватернионов **q**, **f** и **d** соответственно; e_1, e_2, e_3 – направляющие косинусы векторной части этих же кватернионов, общие для всех трех функций. $T = f_\bullet/q_\bullet$. Функция **d** является функцией-производной от изучаемой функции **f**.

В частности, производная обратной функции выражается формулой:

$$(\mathbf{q}^{-1})' = -\mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{q}'\circ\mathbf{q}^{-1}. \tag{2.122}$$

Аддитивный (или обычный) определенный интеграл от кватернионной функции $\mathbf{f}(t)$ вещественной переменной t определим естественным образом:

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\cdot dt = \left[\int_a^b f_0(t)\cdot dt; \int_a^b f_1(t)\cdot dt; \int_a^b f_2(t)\cdot dt; \int_a^b f_3(t)\cdot dt\right], \tag{2.123}$$

где a и b – вещественные пределы интегрирования.

Основные принципы интегрирования те же, что и у обычных интегралов:

$$\begin{gathered} \int_a^b \mathbf{f}(t)\cdot dt = \int_a^c \mathbf{f}(t)\cdot dt + \int_c^b \mathbf{f}(t)\cdot dt; \quad \int_a^b \alpha\cdot\mathbf{v}(t)\cdot dt = \alpha\cdot\int_a^b \mathbf{v}(t)\cdot dt; \\ \int_a^b \boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{v}(t)\cdot dt = \boldsymbol{\alpha}\circ\int_a^b \mathbf{v}(t)\cdot dt; \quad \int_a^b \mathbf{v}(t)\circ\boldsymbol{\alpha}\cdot dt = \left[\int_a^b \mathbf{v}(t)\cdot dt\right]\circ\boldsymbol{\alpha}; \\ \int_a^b \left[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)\right]\cdot dt = \int_a^b \mathbf{u}(t)\cdot dt + \int_a^b \mathbf{v}(t)\cdot dt. \end{gathered} \tag{2.124}$$

Отдельно приведем формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\circ\mathbf{v}'(t)\cdot dt = \mathbf{u}(t)\circ\mathbf{v}(t)\Big|_a^b - \int_a^b \mathbf{u}'(t)\circ\mathbf{v}(t)\cdot dt\,. \tag{2.125}$$

Обозначения те же, что и в формулах (2.118) и (2.123).

Неопределенным интегралом

$$\int \mathbf{f}(t)\cdot dt = \mathbf{F}(t)+\mathbf{c} \tag{2.126}$$

называется функция $\mathbf{F}(t)$, производная которой равна подынтегральной функции $\mathbf{f}(t)$:

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t)\,. \tag{2.127}$$

Эта функция называется первообразной и определяется с точностью до произвольного аддитивного постоянного кватерниона **c**.

Определенный интеграл может быть выражен через неопределенный следующим образом:

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\cdot dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a). \tag{2.128}$$

Рассмотрим здесь взятие неопределенного интеграла кватернионной функции от вещественного аргумента, понимаемое как восстановление первообразной функции по ее производной. Представляет интерес функция поворота постоянного кватерниона **v** на угол $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t$ вокруг оси, определяемой векторной частью постоянного кватерниона **ω**:

$$\exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot t}{2}\right)\circ\mathbf{v}\circ\exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot t}{2}\right). \tag{2.129}$$

Ее неопределенный интеграл

$$\mathbf{J}(t) = \int \exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot t}{2}\right)\circ\mathbf{v}\circ\exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot t}{2}\right)\cdot dt + \mathbf{J0}. \tag{2.130}$$

встречается при интегрировании кинематических уравнений движения твердого тела в пространстве. Для него справедлива следующая формула:

$$\mathbf{J}(t) = \begin{bmatrix} vc_0\cdot t \\ vc_1\cdot t + \dfrac{2}{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle}\cdot\sin\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}\cdot\left(\dfrac{\omega_2\cdot v_3-\omega_3\cdot v_2}{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle}\cdot\sin\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}+vn_1\cdot\cos\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}\right) \\ vc_2\cdot t + \dfrac{2}{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle}\cdot\sin\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}\cdot\left(\dfrac{\omega_3\cdot v_1-\omega_1\cdot v_3}{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle}\cdot\sin\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}+vn_2\cdot\cos\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}\right) \\ vc_3\cdot t + \dfrac{2}{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle}\cdot\sin\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}\cdot\left(\dfrac{\omega_1\cdot v_2-\omega_2\cdot v_1}{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle}\cdot\sin\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}+vn_3\cdot\cos\dfrac{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\cdot t}{2}\right) \end{bmatrix} + \mathbf{J0}, \tag{2.131}$$

где **J0** – произвольный постоянный кватернион; **vc** и **vn** – коллинеарная и нормальная составляющие кватерниона **v** относительно кватерниона **ω**:

$$\mathbf{vc} = \left[v_0,\, P\cdot\omega_1,\, P\cdot\omega_2,\, P\cdot\omega_3\right];\quad \mathbf{vn} = \mathbf{v} - \mathbf{vc};\quad P = \frac{\omega_1\cdot v_1+\omega_2\cdot v_2+\omega_3\cdot v_3}{\langle\boldsymbol{\omega}\rangle^2}. \tag{2.132}$$

2.6.2. Мультипликативные производная и интеграл кватернионной функции вещественной переменной

Кроме описанных выше обычных производной и интеграла, рассмотрим так называемые мультипликативные производную и интеграл, имеющие важное значение в кватернионном анализе. Они представляют собой основные понятия инфинитезимального анализа – своеобразного дифференциального и интегрального исчисления бесконечно малых матричных функций. Эти понятия были впервые введены в математику итальянским ученым Вито Вольтерра в 1887 году. В начале XX в. теория мультипликативного интеграла получила развитие в работах Л. Шлезингера при исследовании систем линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами.



Вито Вольтерра (1860–1940)

В современном изложении мультипликативная производная и мультипликативный интеграл описаны в работе [75]. Краткий обзор основных понятий инфинитезимального анализа дан также в широко распространенной монографии Ф. Р. Гантмахера [13]. Как указано в разделе 2.3, между кватернионами и матрицами специального вида наблюдается изоморфизм. Поэтому основные закономерности инфинитезимального анализа справедливы по отношению к кватернионам.

Ввиду того, что умножение кватернионов некоммутативно, различают левые и правые производные и интегралы кватернионной функции вещественного аргумента.

Левую мультипликативную производную определим следующим образом:

$$^{\times}\mathbf{q}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln\left[\mathbf{q}(t+\Delta t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t)\right]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}(t+\Delta t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t) - \mathbf{i}}{\Delta t}. \qquad (2.133)$$

Для ее обозначения будем использовать символ в виде знака умножения, поставленный на месте верхнего индекса слева от обозначения функции.

Правую мультипликативную производную определим так:

$$\mathbf{q}^{\times}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln\left[\mathbf{q}^{-1}(t) \circ \mathbf{q}(t+\Delta t)\right]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{q}^{-1}(t) \circ \mathbf{q}(t+\Delta t) - \mathbf{i}}{\Delta t}. \qquad (2.134)$$

Для ее обозначения будем использовать тот же символ, поставленный на месте верхнего индекса справа от обозначения функции.

Оба определения мультипликативной производной в формулах (2.133) и (2.134) – эквивалентны. Символом **i** обозначен тождественный кватернион.

Заметим, если в качестве независимой переменной выступает время, а исследуемый кватернион имеет размерность длины, то аддитивная производная имеет размерность линейной скорости (м/сек), а мультипликативная производная – размерность угловой скорости 1/сек.

Установим зависимость между аддитивной и мультипликативной производными. Для этого равенства (2.117) и (2.133) заменим эквивалентными, которые должны соблюдаться при $\Delta t \to 0$.

$$\mathbf{q}'(t) \cdot \Delta t + \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t+\Delta t);\ \exp\left[^{\times}\mathbf{q}(t) \cdot \Delta t\right] \circ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t+\Delta t);\ \mathbf{q}(t) \circ \exp\left[\mathbf{q}^{\times}(t) \cdot \Delta t\right] = \mathbf{q}(t+\Delta t). \qquad (2.135)$$

Поскольку правые части этих равенств равны между собой, должны быть равны и левые:

$$\mathbf{q}'(t) \cdot \Delta t + \mathbf{q}(t) = \exp\left[^{\times}\mathbf{q}(t) \cdot \Delta t\right] \circ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) \circ \exp\left[\mathbf{q}^{\times}(t) \cdot \Delta t\right]. \qquad (2.136)$$

Для случая левой производной рассмотрим более подробно выражение $\exp[{}^{\times}\mathbf{q}\,(t)\cdot\Delta t]$ при малых Δt. Для этого воспользуемся формулой (9.11):

$$\exp\left[{}^{\times}\mathbf{q}(t)\cdot\Delta t\right]=\exp\left[{}^{\times}q_0(t)\cdot\Delta t\right]\cdot\begin{bmatrix}\cos\left[{}^{\times}q_{\bullet}(t)\cdot\Delta t\right]\\ e_1(t)\cdot\sin\left[{}^{\times}q_{\bullet}(t)\cdot\Delta t\right]\\ e_2(t)\cdot\sin\left[{}^{\times}q_{\bullet}(t)\cdot\Delta t\right]\\ e_3(t)\cdot\sin\left[{}^{\times}q_{\bullet}(t)\cdot\Delta t\right]\end{bmatrix}, \tag{2.137}$$

где использованы следующие зависимости:

$$\left[{}^{\times}\mathbf{q}(t)\cdot\Delta t\right]_{\bullet}={}^{\times}q_{\bullet}(t)\cdot\Delta t;\quad e_k(t)=\frac{{}^{\times}q_k(t)\cdot\Delta t}{{}^{\times}q_{\bullet}(t)\cdot\Delta t}=\frac{{}^{\times}q_k(t)}{{}^{\times}q_{\bullet}(t)}\quad(k=1,2,3). \tag{2.138}$$

Жирной точкой, стоящей на месте нижнего индекса, обозначена величина векторной части кватерниона:

$$q_{\bullet}=\pm\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}\,. \tag{2.139}$$

По желанию можно выбрать любой из знаков.

Сохраняя в формуле (2.137) величины не выше первого порядка малости по отношению к Δt, получим:

$$\exp\left[{}^{\times}\mathbf{q}(t)\cdot\Delta t\right]=\begin{bmatrix}1+{}^{\times}q_0(t)\cdot\Delta t\\ {}^{\times}q_1(t)\cdot\Delta t\\ {}^{\times}q_2(t)\cdot\Delta t\\ {}^{\times}q_3(t)\cdot\Delta t\end{bmatrix}=\mathbf{i}+{}^{\times}\mathbf{q}(t)\cdot\Delta t\,, \tag{2.140}$$

где $\mathbf{i}$ – тождественный кватернион.

Из формул (2.136) и (2.140) вытекают следующие зависимости между аддитивной и левой мультипликативной производными кватернионной функции:

$$\mathbf{q}'(t)={}^{\times}\mathbf{q}(t)\circ\mathbf{q}(t);\quad {}^{\times}\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}'(t)\circ\mathbf{q}^{-1}(t)\,. \tag{2.141}$$

Такие же зависимости приняты в монографии [13] в качестве определения мультипликативной производной.

Аналогично рассуждая, получим зависимости, связывающие аддитивную и правую мультипликативную производные:

$$\mathbf{q}'(t)=\mathbf{q}(t)\circ\mathbf{q}^{\times}(t);\quad \mathbf{q}^{\times}(t)=\mathbf{q}^{-1}(t)\circ\mathbf{q}'(t)\,. \tag{2.142}$$

Левая и правая мультипликативные производные связаны между собой зависимостями:

$$\mathbf{q}^{\times}(t)=\mathbf{q}^{-1}(t)\circ{}^{\times}\mathbf{q}(t)\circ\mathbf{q}(t);\quad {}^{\times}\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}(t)\circ\mathbf{q}^{\times}(t)\circ\mathbf{q}^{-1}(t)\,. \tag{2.143}$$

Ниже приводятся основные формулы мультипликативного дифференцирования. В них для краткости письма не показана зависимость функций от аргумента t.

$$^{\times}(\mathbf{p}\circ\mathbf{q}) = {}^{\times}\mathbf{p} + \mathbf{p}\circ{}^{\times}\mathbf{q}\circ\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}\circ(\mathbf{p}^{\times} + {}^{\times}\mathbf{q})\circ\mathbf{p}^{-1};\quad (\mathbf{p}\circ\mathbf{q})^{\times} = \mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{p}^{\times}\circ\mathbf{q} + \mathbf{q}^{\times} = \mathbf{q}^{-1}\circ(\mathbf{p}^{\times} + {}^{\times}\mathbf{q})\circ\mathbf{q}. \quad (2.144)$$

Если один из этих кватернионов есть константа **c**, получим:

$$^{\times}(\mathbf{c}\circ\mathbf{q}) = \mathbf{c}\circ{}^{\times}\mathbf{q}\circ\mathbf{c}^{-1};\quad {}^{\times}(\mathbf{p}\circ\mathbf{c}) = {}^{\times}\mathbf{p};\quad (\mathbf{c}\circ\mathbf{q})^{\times} = \mathbf{q}^{\times};\quad (\mathbf{p}\circ\mathbf{c})^{\times} = \mathbf{c}^{-1}\circ\mathbf{p}^{\times}\circ\mathbf{c}. \quad (2.145)$$

Как показывают формулы, умножение дифференцируемой функции на кватернион-константу справа не меняет левую мультипликативную производную, умножение дифференцируемой функции на кватернион-константу слева не меняет правую мультипликативную производную.

Справедливы такие формулы для мультипликативных производных обратной функции:

$$^{\times}(\mathbf{q}^{-1}) = -\mathbf{q}^{-1}\circ{}^{\times}\mathbf{q}\circ\mathbf{q} = -\mathbf{q}^{\times};\qquad (\mathbf{q}^{-1})^{\times} = -\mathbf{q}\circ\mathbf{q}^{\times}\circ\mathbf{q}^{-1} = -{}^{\times}\mathbf{q}. \quad (2.146)$$

Эта формула позволяет также записать:

$$^{\times}(\mathbf{p}^{-1}\circ\mathbf{q}) = \mathbf{p}^{-1}\circ({}^{\times}\mathbf{q} - {}^{\times}\mathbf{p})\circ\mathbf{p};\qquad (\mathbf{p}\circ\mathbf{q}^{-1})^{\times} = \mathbf{q}\circ(\mathbf{p}^{\times} - \mathbf{q}^{\times})\circ\mathbf{q}^{-1}. \quad (2.147)$$

Далее приводятся формулы для дифференцирования сопряженного кватерниона:

$$^{\times}\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}}\circ\overline{{}^{\times}\mathbf{q}}\circ\overline{\mathbf{q}}^{-1} = \overline{\mathbf{q}^{-1}\circ{}^{\times}\mathbf{q}\circ\mathbf{q}};\qquad \overline{\mathbf{q}}^{\times} = \overline{\mathbf{q}}^{-1}\circ\overline{\mathbf{q}^{\times}}\circ\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}\circ\mathbf{q}^{\times}\circ\mathbf{q}^{-1}}. \quad (2.148)$$

Перейдем к рассмотрению мультипликативного определенного интеграла. Пусть на отрезке интегрирования $a \le t \le b$ задана кватернионная функция $\mathbf{p}(t)$ вещественной переменной t (рис. 2.2). Разобьем отрезок интегрирования на n равных участков длиной $\Delta t = (b - a)/n$, пронумеруем их в направлении возрастания переменной t числами 1, 2, ..., n и выберем внутри каждого из этих участков точку с координатой τ_1, τ_2, ..., τ_n соответственно. Ввиду некоммутативности умножения кватернионов на базе этого разбиения можно построить отличающиеся друг от друга левое и правое интегральные произведения.

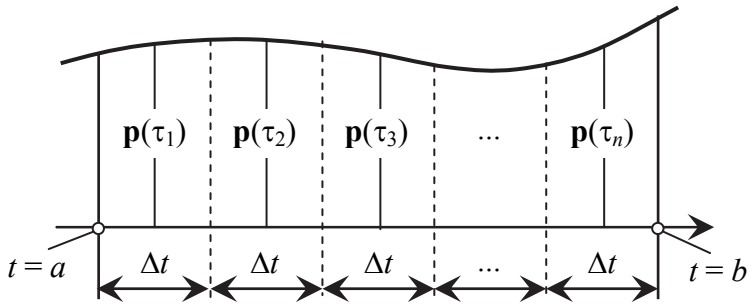


Рис. 2.2. К определению мультипликативного интеграла

Левое интегральное кватернионное произведение строится по формуле:

$$\prod_{k=n}^{1}\exp\left[\mathbf{p}(\tau_k)\cdot\Delta t\right] = \exp\left[\mathbf{p}(\tau_n)\cdot\Delta t\right]\circ\ldots\circ\exp\left[\mathbf{p}(\tau_2)\cdot\Delta t\right]\circ\exp\left[\mathbf{p}(\tau_1)\cdot\Delta t\right]. \quad (2.149)$$

Сомножители в этом интегральном произведении расположены так, что их номера возрастают справа налево, обратно порядку следования участков отрезка интегрирования вдоль оси t.

Правое интегральное кватернионное произведение выглядит так:

$$\prod_{k=1}^{n}\exp\left[\mathbf{p}(\tau_k)\cdot\Delta t\right]=\exp\left[\mathbf{p}(\tau_1)\cdot\Delta t\right]\circ\exp\left[\mathbf{p}(\tau_2)\cdot\Delta t\right]\circ\ldots\circ\exp\left[\mathbf{p}(\tau_n)\cdot\Delta t\right]. \qquad (2.150)$$

В правом интегральном произведении порядок следования сомножителей – прямой.

Мультипликативным определенным интегралом называется предел, к которому стремится интегральное произведение, если число участков n стремится к бесконечности:

$$\overleftarrow{\bigcap_a^b}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{1}\exp\left[\mathbf{p}(\tau_k)\cdot\Delta t\right];\quad \overrightarrow{\bigcap_a^b}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\exp\left[\mathbf{p}(\tau_k)\cdot\Delta t\right]. \qquad (2.151)$$

Приведенный здесь новый символ, похожий на знак произведения, будем впредь применять для обозначения мультипликативного интеграла. Мультипликативные интегралы по такому же принципу, как и интегральные произведения, подразделяются на левые и правые. Для того, чтобы отличить левый мультипликативный интеграл от правого, под подынтегральным выражением ставится стрелка: для левого интеграла – идущая справа налево, для правого интеграла – идущая слева направо.

Интегральное произведение в мультипликативном интеграле является аналогом интегральной суммы в аддитивном интеграле. В пределе, аддитивный интеграл является бесконечной суммой слагаемых, стремящихся к нулю, а мультипликативный интеграл – бесконечным произведением сомножителей, стремящихся к единице.

Что касается размерности величин, то в аддитивном интеграле эти размерности могут быть любыми. Мультипликативный определенный интеграл – величина безразмерная. Поэтому, если независимая переменная – время, подынтегральная функция должна иметь размерность 1/сек (угловая скорость), если независимая переменная – длина дуги, подынтегральная функция должна иметь размерность 1/м (кривизна).

Эквивалентным (2.151) является такое определение мультипликативного интеграла:

$$\overleftarrow{\bigcap_a^b}\left[\mathbf{i}+\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{1}\left[\mathbf{i}+\mathbf{p}(\tau_k)\cdot\Delta t\right];\qquad \overrightarrow{\bigcap_a^b}\left[\mathbf{i}+\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\mathbf{i}+\mathbf{p}(\tau_k)\cdot\Delta t\right], \qquad (2.152)$$

где $\mathbf{i}$ – тождественный кватернион.

Приведем основные формулы мультипликативного интегрирования. Первая серия формул касается пределов интегрирования в определенном интеграле.

$$\overleftarrow{\bigcap_a^a}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\mathbf{i};\qquad \overleftarrow{\bigcap_a^b}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\overleftarrow{\bigcap_c^b}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]\circ\overleftarrow{\bigcap_a^c}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]; \qquad (2.153)$$

$$\overrightarrow{\bigcap_a^a}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\mathbf{i};\qquad \overrightarrow{\bigcap_a^b}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]=\overrightarrow{\bigcap_a^c}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]\circ\overrightarrow{\bigcap_c^b}\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]; \qquad (2.154)$$

$$\bigcap_{b}^{a}\underleftarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}=\left\{\bigcap_{a}^{b}\underleftarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}\right\}^{-1};\quad \bigcap_{b}^{a}\underrightarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}=\left\{\bigcap_{a}^{b}\underrightarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}\right\}^{-1}. \quad (2.155)$$

Из этих формул следует, что при равных между собой пределах интегрирования мультипликативный определенный интеграл равен тождественному кватерниону **i**. Вычисляя мультипликативный определенный интеграл, можно разбить участок интегрирования на два участка и вычислить мультипликативные определенные интегралы для каждого участка в отдельности. Искомый интеграл будет равен произведению участковых интегралов. Для левого интеграла сомножители надо располагать в обратном порядке, а для правого интеграла – в прямом, поскольку результат перемножения кватернионов зависит от их порядка следования. Перемена мест пределов интегрирования приводит к обратному кватерниону.

Следующая формула полезна при специальном виде подынтегральной функции.

$$\bigcap_{a}^{b}\underleftrightarrow{\exp\left[\mathbf{c}\circ\mathbf{p}(t)\circ\mathbf{c}^{-1}\cdot dt\right]}=\mathbf{c}\circ\bigcap_{a}^{b}\underleftrightarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}\circ\mathbf{c}^{-1}, \quad (2.156)$$

где **c** – постоянный кватернион.

Для мультипликативного интеграла существуют формулы интегрирования по частям:

$$\bigcap_{a}^{b}\underleftarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(t)+^{\times}\mathbf{v}(t)\right]\cdot dt\right\}}=\mathbf{v}(b)\circ\bigcap_{a}^{b}\underleftarrow{\exp\left[\mathbf{v}^{-1}(t)\circ\mathbf{u}(t)\circ\mathbf{v}(t)\cdot dt\right]}\circ\mathbf{v}^{-1}(a); \quad (2.157)$$

$$\bigcap_{a}^{b}\underrightarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}^{\times}(t)\right]\cdot dt\right\}}=\mathbf{v}^{-1}(a)\circ\bigcap_{a}^{b}\underrightarrow{\exp\left[\mathbf{v}(t)\circ\mathbf{u}(t)\circ\mathbf{v}^{-1}(t)\cdot dt\right]}\circ\mathbf{v}(b). \quad (2.158)$$

Эти формулы являются аналогами формулы (2.125) для аддитивного интеграла.

Неопределенный мультипликативный интеграл будем трактовать как первообразную кватернионную функцию $\mathbf{x}(t)$, по отношению к известной кватернионной функции $\mathbf{p}(t)$. Если эта функция является левой мультипликативной производной неизвестной функции $\mathbf{x}(t)$, то есть удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$^{\times}\mathbf{x}(t)=\mathbf{p}(t), \quad (2.159)$$

то функцию $\mathbf{x}(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{x}(t)=\bigcap_{t_0}^{t}\underleftarrow{\exp[\mathbf{p}(\tau)\cdot d\tau]}\circ\mathbf{x}(t_0). \quad (2.160)$$

Это есть общее решение дифференциального уравнения (2.159) с произвольным постоянным кватернионом $\mathbf{x}(t_0)$, равным значению функции $\mathbf{x}(t)$ при $t = t_0$.

Если функция $\mathbf{p}(t)$ является правой мультипликативной производной функции $\mathbf{x}(t)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\mathbf{x}^{\times}(t)=\mathbf{p}(t), \quad (2.161)$$

то общее решение этого уравнения может быть представлено в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) \circ \prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp[\mathbf{p}(\tau) \cdot d\tau]} \tag{2.162}$$

с произвольным постоянным кватернионом $\mathbf{x}(t_0)$.

Неопределенный мультипликативный интеграл имеет размерность произвольного постоянного кватерниона. Эта размерность может быть любой.

Неопределенный мультипликативный интеграл может быть использован для вычисления определенного мультипликативного интеграла:

$$\prod_{a}^{b} \underleftarrow{\exp[\mathbf{p}(t) \cdot dt]} = \mathbf{x}(b) \circ \mathbf{x}^{-1}(a); \quad \prod_{a}^{b} \underrightarrow{\exp[\mathbf{p}(t) \cdot dt]} = \mathbf{x}^{-1}(a) \circ \mathbf{x}(b). \tag{2.163}$$

Эти зависимости вытекают из формул (2.160) и (2.162) и являются аналогами формулы (2.128) для аддитивного определенного интеграла.

Справедливы следующие формулы для мультипликативных производных мультипликативных интегралов:

$$^{\times}\left\{\prod_{t_0}^{t} \underleftarrow{\exp[\mathbf{p}(\tau) \cdot d\tau]}\right\} = \mathbf{p}(t); \qquad \left\{\prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp[\mathbf{p}(\tau) \cdot d\tau]}\right\}^{\times} = \mathbf{p}(t). \tag{2.164}$$

Формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла выглядят следующим образом:

$$\prod_{t_0}^{t} \underleftarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(\tau) +^{\times} \mathbf{v}(\tau)\right] \cdot d\tau\right\}} = \mathbf{v}(t) \circ \prod_{t_0}^{t} \underleftarrow{\exp\left[\mathbf{v}^{-1}(\tau) \circ \mathbf{u}(\tau) \circ \mathbf{v}(\tau) \cdot d\tau\right]} \circ \mathbf{v}^{-1}(t_0); \tag{2.165}$$

$$\prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}^{\times}(\tau)\right] \cdot d\tau\right\}} = \mathbf{v}^{-1}(t_0) \circ \prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp\left[\mathbf{v}(\tau) \circ \mathbf{u}(\tau) \circ \mathbf{v}^{-1}(\tau) \cdot d\tau\right]} \circ \mathbf{v}(t). \tag{2.166}$$

Формулы (2.165) и (2.166) могут быть переписаны следующим образом:

$$\prod_{t_0}^{t} \underleftarrow{\exp\left[\mathbf{v}^{-1}(\tau) \circ \mathbf{u}(\tau) \circ \mathbf{v}(\tau) \cdot d\tau\right]} = \mathbf{v}^{-1}(t) \circ \prod_{t_0}^{t} \underleftarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(\tau) +^{\times} \mathbf{v}(\tau)\right] \cdot d\tau\right\}} \circ \mathbf{v}(t_0); \tag{2.167}$$

$$\prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp\left[\mathbf{v}(\tau) \circ \mathbf{u}(\tau) \circ \mathbf{v}^{-1}(\tau) \cdot d\tau\right]} = \mathbf{v}(t_0) \circ \prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}^{\times}(\tau)\right] \cdot d\tau\right\}} \circ \mathbf{v}^{-1}(t), \tag{2.168}$$

а с учетом зависимостей (2.146) они выглядят так:

$$\prod_{t_0}^{t} \underleftarrow{\exp\left[\mathbf{v}(\tau) \circ \mathbf{u}(\tau) \circ \mathbf{v}^{-1}(\tau) \cdot d\tau\right]} = \mathbf{v}(t) \circ \prod_{t_0}^{t} \underleftarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(\tau) -^{\times} \mathbf{v}(\tau)\right] \cdot d\tau\right\}} \circ \mathbf{v}^{-1}(t_0); \tag{2.169}$$

$$\prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp\left[\mathbf{v}^{-1}(\tau) \circ \mathbf{u}(\tau) \circ \mathbf{v}(\tau) \cdot d\tau\right]} = \mathbf{v}^{-1}(t_0) \circ \prod_{t_0}^{t} \underrightarrow{\exp\left\{\left[\mathbf{u}(\tau) - {}^{\times}\mathbf{v}(\tau)\right] \cdot d\tau\right\}} \circ \mathbf{v}(t). \tag{2.170}$$

Формулы (2.167)–(2.170) дают возможность преобразовывать часто встречающиеся мультипликативные интегралы к более рациональному виду, позволяющему существенно уменьшить количество арифметических операций при численном интегрировании.

Специфика мультипликативного интеграла связана с неперестановочностью между собой различных значений подынтегральной кватернионной функции $\mathbf{p}(t)$. В частном случае, когда все значения функции $\mathbf{p}(t)$ коаксиальны, то есть перестановочны между собой:

$$\overset{\times}{\bigcap_a^b} \exp[\mathbf{p}(t)\cdot dt] = \exp\left[\int_a^b \mathbf{p}(t)\cdot dt\right]. \tag{2.171}$$

Несколько слов о перемене местами пределов интегрирования и об обращении мультипликативного интеграла. Формула (2.155) свидетельствует о том, что эти две операции эквивалентны друг другу. Что это означает, можно увидеть на примере обращения интегрального кватернионного произведения (2.149):

$$\left\{\prod_{k=n}^{1} \exp\left[\mathbf{p}(\tau_k)\cdot\Delta t\right]\right\}^{-1} = \exp\left[-\mathbf{p}(\tau_1)\cdot\Delta t\right]\circ\exp\left[-\mathbf{p}(\tau_2)\cdot\Delta t\right]\circ\ldots\circ\exp\left[-\mathbf{p}(\tau_n)\cdot\Delta t\right]. \tag{2.172}$$

Эта формула следует из правила обращения произведения кватернионов (2.42). В пределе:

$$\begin{aligned}\overset{a}{\underset{b}{\bigcap}} \underleftarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]} &= \left\{\overset{b}{\underset{a}{\bigcap}} \underleftarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}\right\}^{-1} = \\ = \lim_{n\to\infty}\left\{\exp\left[-\mathbf{p}(\tau_1)\cdot\Delta t\right]\circ\exp\left[-\mathbf{p}(\tau_2)\cdot\Delta t\right]\circ\ldots\circ\exp\left[-\mathbf{p}(\tau_n)\cdot\Delta t\right]\right\} &= \overset{b}{\underset{a}{\bigcap}} \underrightarrow{\exp\left[-\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}.\end{aligned} \tag{2.173}$$

Заметим, что здесь сомножители следуют не в обратном, а в прямом порядке. Таким образом, справедлива формула:

$$\overset{b}{\underset{a}{\bigcap}} \underleftarrow{\exp\left[\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]} = \overset{a}{\underset{b}{\bigcap}} \underrightarrow{\exp\left[-\mathbf{p}(t)\cdot dt\right]}, \tag{2.174}$$

определяющая правило для перехода от левого к правому интегралу.

2.7. Представление нормированных кватернионов на поверхности сферы

Наибольшее практическое применение до настоящего времени принадлежит нормированным кватернионам. Именно нормированные кватернионы использовались Гамильтоном [12] и его последователями [9, 73] для оцифровки поворотов в трехмерном пространстве. В этом разделе описан классический метод графического представления нормированных кватернионов на поверхности единичной сферы, восходящий к работе Гамильтона [12].

2.7.1. Общие положения

Рассмотрим нормированный кватернион

$$\mathbf{q} = \left[q_0, q_1, q_2, q_3 \right], \tag{2.175}$$

то есть такой, у которого

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \tag{2.176}$$

Заметим, что в силу (2.176) компоненты нормированного кватерниона безразмерны.

Этот кватернион характеризуется единичным вектором **e** с компонентами:

$$e_1 = \frac{q_1}{\langle \mathbf{q} \rangle}, e_2 = \frac{q_2}{\langle \mathbf{q} \rangle}, e_3 = \frac{q_3}{\langle \mathbf{q} \rangle}; \quad \langle \mathbf{q} \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \tag{2.177}$$

и аргументом (углом поворота)

$$\theta = \arg(q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle). \tag{2.178}$$

С использованием этой информации нормированный кватернион **q** можно записать :

$$\mathbf{q} = \left[\cos\theta, e_1 \cdot \sin\theta, e_2 \cdot \sin\theta, e_3 \cdot \sin\theta \right]. \tag{2.179}$$

Он может быть представлен на сфере единичного радиуса ориентированной дугой большого круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной единичному вектору **e** и представляющей точкой, находящейся на конце единичного вектора (рис. 2.3 *a*). Дуга ориентирована относительно вектора по правилу буравчика и описывает угол θ. Для наблюдателя, находящегося в точке, представляющей кватернион, она направлена против часовой стрелки. (Если в результате вычислений угол θ окажется отрицательным, дугу надо будет изображать ориентированной по часовой стрелке). Поскольку сфера имеет радиус, равный единице, длина дуги равна θ. Точка, представляющая кватернион, имеет координаты:

$$x_1 = e_1; \quad x_2 = e_2; \quad x_3 = e_3. \tag{2.180}$$

Дугу следует рассматривать как скользящую. Это означает, что ее можно перемещать вдоль большого круга, не меняя направления, причем в любом своем положении дуга будет представлять один и тот же кватернион **q**.

Представление нормированного кватерниона при помощи дуги большого круга сферы единичного радиуса удобно для уяснения того, что представляют собою степени кватерниона. Как видно из рис. 2.3 *b*), – это дуги того же большого круга разной длины и разной направленности. Если принять длину дуги, соответствующей кватерниону **q**, за единицу, то дуга, соответствующая обратному кватерниону, будет иметь ту же длину, но со знаком минус, и противоположное направление; дуга, соответствующая корню квадратному из кватерниона, будет иметь половинную длину; дуга, соответствующая квадрату кватерниона, будет иметь удвоенную длину. Заметим, что любая степень нормированного кватерниона – нормированный кватернион.

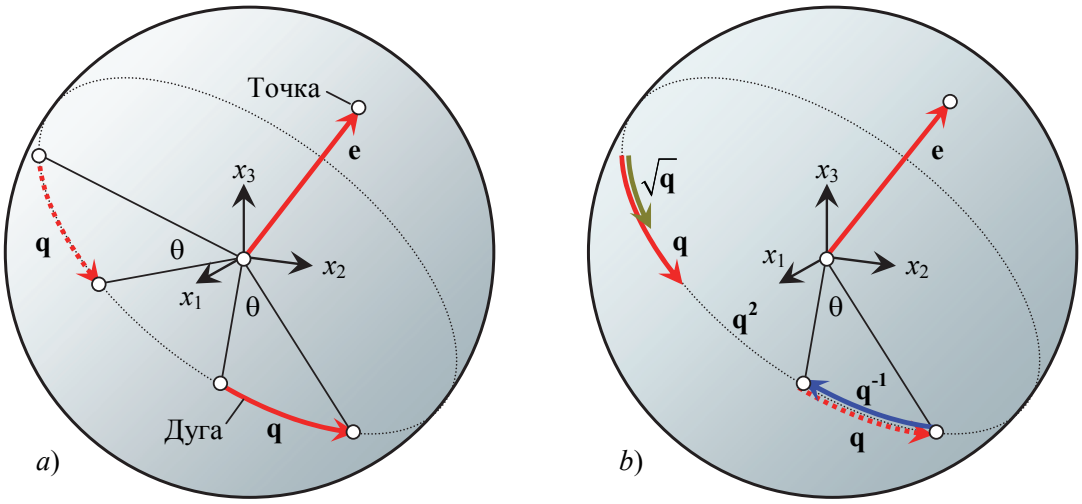


Рис. 2.3. *a*) Представление кватерниона **q**. *b*) Представление степеней кватерниона **q**

Единичный вектор **e**, если его рассматривать как чисто векторный кватернион, изображается на единичной сфере как точка с координатами e_1, e_2, e_3 и дуга большого круга, нормального к вектору **e** с углом $\theta = \pi/2$.

2.7.2. Построение нормированного кватерниона по двум единичным векторам

Два единичных вектора **a** и **b**, показанных на рис. 2.4 *a*), можно использовать для построения нормированного кватерниона **r**, дуга которого соединяет концы векторов **a** и **b** по большому кругу и направлена от **a** к **b**.

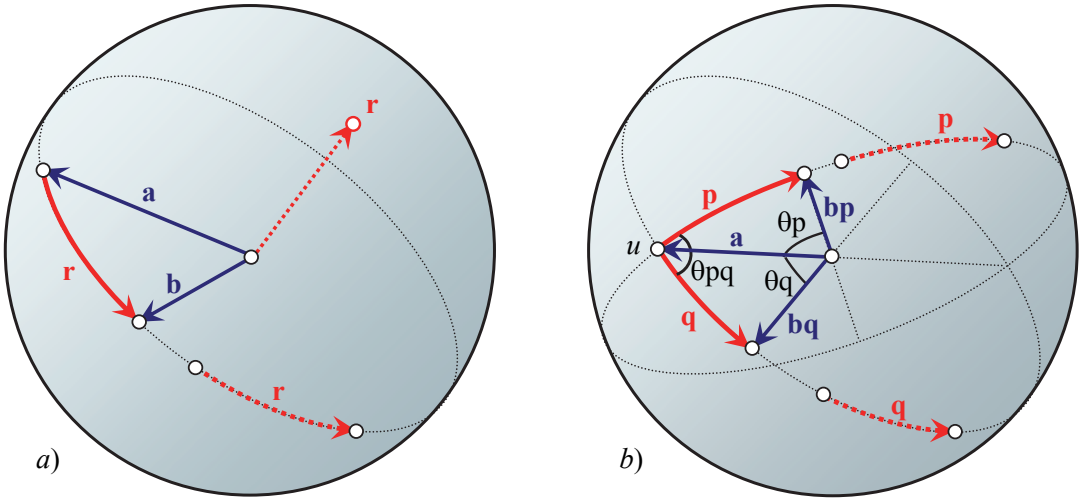


Рис. 2.4. *a*) Построение нормированного кватерниона **r** по двум единичным векторам **a** и **b**. *b*) Разложение нормированных кватернионов на чисто векторные сомножители

Формулы для элементов этого кватерниона имеют вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{bmatrix}. \tag{2.181}$$

Здесь, как и ранее, вектор и чисто векторный кватернион, построенный на его основе, обозначаются одной и той же буквой, что и показано в формуле (2.181).

Полученный нормированный кватернион **r** изображается дугой, имеющей длину

$$\theta = \arccos(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3), \tag{2.182}$$

и точкой с координатами

$$\frac{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2}{\sin\theta}, \quad \frac{a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3}{\sin\theta}, \quad \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{\sin\theta}. \tag{2.183}$$

Дугу можно свободно перемещать вдоль большой окружности.

2.7.3. Представление кватерниона в виде частного от деления двух чисто векторных кватернионов

Формула предыдущего раздела (2.181) позволяет однозначно определить нормированный кватернион **r** как частное от деления чисто векторного нормированного кватерниона **b** на чисто векторный нормированный кватернион **a**. Обратная же задача решается неоднозначно. Из формулы (2.181) следует:

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \circ \mathbf{a}. \tag{2.184}$$

Это означает, что для заданного нормированного кватерниона **r** по известному чисто векторному нормированному кватерниону **a** можно получить нормированный кватернион **b**. Однако этот кватернион не обязательно будет чисто векторным. Чтобы это произошло, требуется выполнение условия:

$$b_0 = r_1 \cdot a_1 + r_2 \cdot a_2 + r_3 \cdot a_3 = 0, \tag{2.185}$$

то есть требуется, чтобы векторная часть кватерниона **a** была ортогональна векторной части кватерниона **r**. Таким образом, сколько есть чисто векторных нормированных кватернионов, ортогональных векторной части кватерниона **r**, столько решений имеет рассматриваемая задача.

Однозначно решается другая подобная задача о представлении каждого из двух произвольных нормированных кватернионов, для определенности **p** и **q**, в виде частного от деления чисто векторных нормированных кватернионов, причем в этих представлениях знаменатель будет общим. Рис. 2.4 *b*) поможет понять геометрический смысл этой задачи.

Если переместить дуги, изображающие нормированные кватернионы **p** и **q** так, чтобы начала этих дуг сошлись в одной точке *u* на пересечении соответствующих больших окружностей, то единичный радиус-вектор этой точки **a** будет ортогональным векторным частям обоих рассматриваемых кватернионов. Это позволит

представить их как частные от деления чисто векторных нормированных кватернионов **bp** и **bq** на чисто векторный нормированный кватернион с векторной частью **a** в следующем виде:

$$\mathbf{p} = \mathbf{bp} \circ \mathbf{a}^{-1}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{bq} \circ \mathbf{a}^{-1}. \tag{2.186}$$

Векторные компоненты кватерниона **a** должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3 &= 1; \\ p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + p_3 \cdot a_3 &= 0; \\ q_1 \cdot a_1 + q_2 \cdot a_2 + q_3 \cdot a_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.187}$$

Первое из этих уравнений – условие нормированности кватерниона **a**, а два остальных – условия ортогональности его векторной части к векторным частям кватернионов **p** и **q**. Решение этой системы уравнений таково:

$$a_1 = (p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2)/z; \quad a_2 = (p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3)/z; \quad a_3 = (p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1)/z, \tag{2.188}$$

где

$$z = \sqrt{(p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2)^2 + (p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3)^2 + (p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1)^2}\ . \tag{2.189}$$

Знаменатель z может быть представлен и в другой форме:

$$z = \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3)^2}\ . \tag{2.190}$$

Эта форма дает возможность представить знаменатель z в тригонометрическом виде и придать ему геометрический смысл. Если записать кватернионы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [p_0;\ p_1;\ p_2;\ p_3] = [\cos\theta p; \quad ep_1 \cdot \sin\theta p; \quad ep_2 \cdot \sin\theta p; \quad ep_3 \cdot \sin\theta p]; \\ \mathbf{q} &= [q_0;\ q_1;\ q_2;\ q_3] = [\cos\theta q; \quad eq_1 \cdot \sin\theta q; \quad eq_2 \cdot \sin\theta q; \quad eq_3 \cdot \sin\theta q], \end{aligned} \tag{2.191}$$

где ep_1, ep_2, ep_3; eq_1, eq_2, eq_3 – компоненты единичных векторов **ep** и **eq**, а θp θq – аргументы нормированных кватернионов **p** и **q**, откуда вытекает:

$$ep_1^2 + ep_2^2 + ep_3^2 = 1; \quad eq_1^2 + eq_2^2 + eq_3^2 = 1, \tag{2.192}$$

то мы увидим, что:

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \sin^2\theta p; \quad q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \sin^2\theta q; \\ p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 = \sin\theta p \cdot \sin\theta q \cdot \cos\theta pq. \end{aligned} \tag{2.193}$$

Здесь через θpq обозначен угол между единичными векторами **ep** и **eq** или, что то же самое, между плоскостями больших окружностей кватернионов **p** и **q**. Упомянутые выше углы показаны на рис. 2.4 *b*). Знаменатель z в тригонометрическом виде выглядит так:

$$z = \sin\theta p \cdot \sin\theta q \cdot \sin\theta pq\ . \tag{2.194}$$

Углы могут быть вычислены по формулам:

$$\theta p = \arccos p_0; \quad \theta q = \arccos q_0; \quad \theta pq = \arccos \frac{p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3}{\sin \theta p \cdot \sin \theta q}. \tag{2.195}$$

Таким образом, для вычисления кватерниона **a** могут быть рекомендованы две формулы:

$$\mathbf{a} = \frac{[0; \quad p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2; \quad p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3; \quad p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1]}{\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - (p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3)^2}}; \tag{2.196}$$

$$\mathbf{a} = \frac{[0; \quad p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2; \quad p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3; \quad p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1]}{\sin \theta p \cdot \sin \theta q \cdot \sin \theta pq}. \tag{2.197}$$

После этого кватернионы **bp** и **bq** определяются элементарно:

$$\mathbf{bp} = \mathbf{p} \circ \mathbf{a}; \quad \mathbf{bq} = \mathbf{q} \circ \mathbf{a}. \tag{2.198}$$

Ненормированные кватернионы также можно представить в виде частного от деления чисто векторных кватернионов. При этом формулы (2.196) и (2.198) остаются справедливыми, а формулы (2.195) и (2.197) должны быть заменены следующими:

$$\theta p = \arccos \frac{p_0}{|\mathbf{p}|}; \quad \theta q = \arccos \frac{q_0}{|\mathbf{q}|}; \quad \theta pq = \arccos \frac{p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}| \cdot \sin \theta p \cdot \sin \theta q}; \tag{2.199}$$

$$\mathbf{a} = \frac{[0; \quad p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2; \quad p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3; \quad p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1]}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}| \cdot \sin \theta p \cdot \sin \theta q \cdot \sin \theta pq}. \tag{2.200}$$

2.7.4. Сферический треугольник

Три единичных вектора **a**, **b** и **c**, показанных на рис. 2.5, можно использовать для построения сферического треугольника, ориентированными сторонами которого есть дуги кватернионов **p**, **q** и **r**. Эти кватернионы могут быть вычислены по формулам типа (2.181):

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ \mathbf{b}^{-1}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{a} \circ \mathbf{c}^{-1}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}^{-1}. \tag{2.201}$$

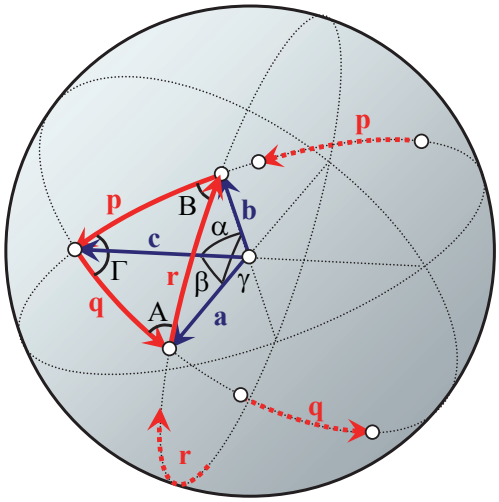


Рис. 2.5. Сферический треугольник

Длины сторон этого треугольника [см. формулу (2.182)] соответственно равны:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos(b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3); \\ \beta &= \arccos(c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 + c_3 \cdot a_3); \\ \gamma &= \arccos(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3). \end{aligned} \tag{2.202}$$

Рассмотрим далее три точки p, q и r на поверхности этой же сферы, расположенные

на концах единичных векторов, перпендикулярных большим кругам с дугами **p**, **q** и **r** соответственно. Координаты этих точек [см. формулу (2.183)] таковы:

$$\begin{aligned} p:&\ \frac{b_2\cdot c_3-b_3\cdot c_2}{\sin\alpha},\ \frac{b_3\cdot c_1-b_1\cdot c_3}{\sin\alpha},\ \frac{b_1\cdot c_2-b_2\cdot c_1}{\sin\alpha};\\ q:&\ \frac{c_2\cdot a_3-c_3\cdot a_2}{\sin\beta},\ \frac{c_3\cdot a_1-c_1\cdot a_3}{\sin\beta},\ \frac{c_1\cdot a_2-c_2\cdot a_1}{\sin\beta};.\\ r:&\ \frac{a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2}{\sin\gamma},\ \frac{a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3}{\sin\gamma},\ \frac{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}{\sin\gamma}. \end{aligned} \qquad (2.203)$$

Косинусы углов сферического треугольника А, В, Г (см. рис. 2.5) определим с использованием скалярных произведений единичных векторов, координаты которых даются формулами (2.203). Скалярные произведения равны косинусам дополняющих (до π) углов, а отличающиеся от них по знаку косинусы углов А, В, Г можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} q\cdot r:\cos\mathrm{A}&=\frac{(b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_3)-(c_1\cdot a_1+c_2\cdot a_2+c_3\cdot a_3)\cdot(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma};\\ r\cdot p:\cos\mathrm{B}&=\frac{(c_1\cdot a_1+c_2\cdot a_2+c_3\cdot a_3)-(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3)\cdot(b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_3)}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha};\\ p\cdot q:\cos\Gamma&=\frac{(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3)-(b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_3)\cdot(c_1\cdot a_1+c_2\cdot a_2+c_3\cdot a_3)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}. \end{aligned} \qquad (2.204)$$

С учетом формул (2.202) можно записать:

$$\cos\mathrm{A}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma};\cos\mathrm{B}=\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha};\cos\Gamma=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}. \qquad (2.205)$$

Нетрудно заметить, что формулы (2.205) эквивалентны формулам теоремы косинусов для сторон в сферической геометрии [33].

Синусы углов А, В, Г определим с использованием попарных векторных произведений единичных векторов, координаты которых даются формулами (2.203). Эти векторные произведения таковы:

$$\begin{aligned} q\times r:&\ \frac{a_1\cdot\Delta}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},\ \frac{a_2\cdot\Delta}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},\ \frac{a_3\cdot\Delta}{\sin\beta\cdot\sin\gamma};\\ r\times p:&\ \frac{b_1\cdot\Delta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha},\ \frac{b_2\cdot\Delta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha},\ \frac{b_3\cdot\Delta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha};\\ p\times q:&\ \frac{c_1\cdot\Delta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},\ \frac{c_2\cdot\Delta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},\ \frac{c_3\cdot\Delta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}, \end{aligned} \qquad (2.206)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.207)$$

Из формул (2.206) можно заключить, что:

$$\sin A = \frac{\Delta}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}; \quad \sin B = \frac{\Delta}{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}; \quad \sin\Gamma = \frac{\Delta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}. \qquad (2.208)$$

Из этих формул следует формула теоремы синусов в сферической геометрии [33]:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin\Gamma}{\sin\gamma} = \frac{\Delta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}. \qquad (2.209)$$

2.7.5. *Произведение двух кватернионов*

Рассмотрим, как выполняется на единичной сфере операция умножения кватернионов.

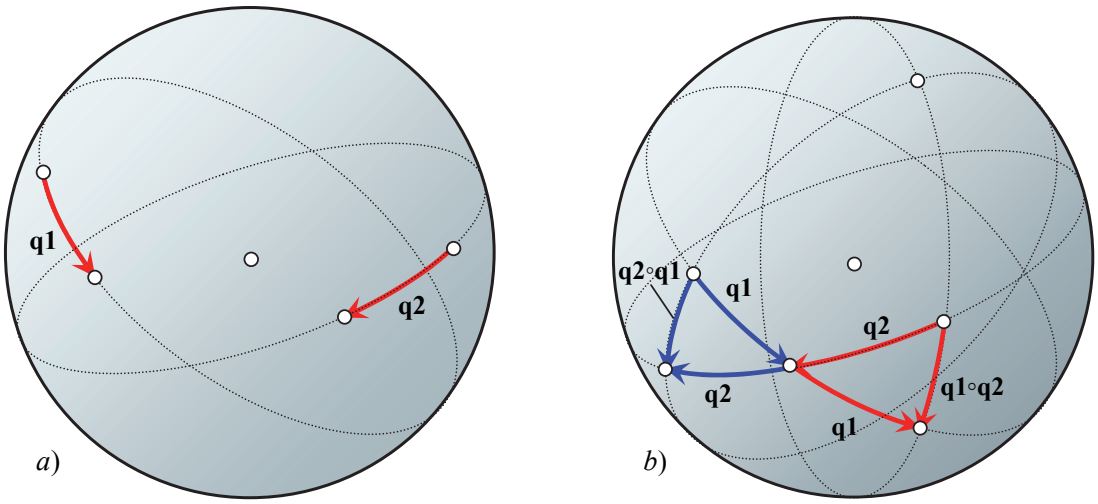


Рис. 2.6. *a*) Кватернионы-сомножители **q1** и **q2**. *b*) Произведения **q1**◦**q2** и **q2**◦**q1**

Пусть в качестве сомножителей выступают нормированные кватернионы **q1** и **q2.** Они изображены на рис. 2.6 *a*) в виде дуг больших кругов. Для того чтобы перемножить эти кватернионы, надо для начала передвинуть дуги кватернионов-сомножителей вдоль больших кругов так, чтобы конец дуги второго сомножителя совместился бы с началом дуги первого сомножителя. Затем надо соединить начало дуги второго сомножителя с концом дуги первого сомножителя дугой большого круга. Эта дуга представляет произведение нормированных кватернионов. На рис. 2.6 *b*) в правой части рисунка показано построение произведения **q1**◦**q2**. В левой части рисунка показано построение произведения **q2**◦**q1**. Рис. 2.6 *b*) подтверждает некоммутативность операции умножения кватернионов.

2.7.6. *Тройное произведение кватернионов*

При изучении поворотов твердого тела в пространстве часто встречается тройное произведение кватернионов следующего вида:

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{q}^{-1}. \qquad (2.210)$$

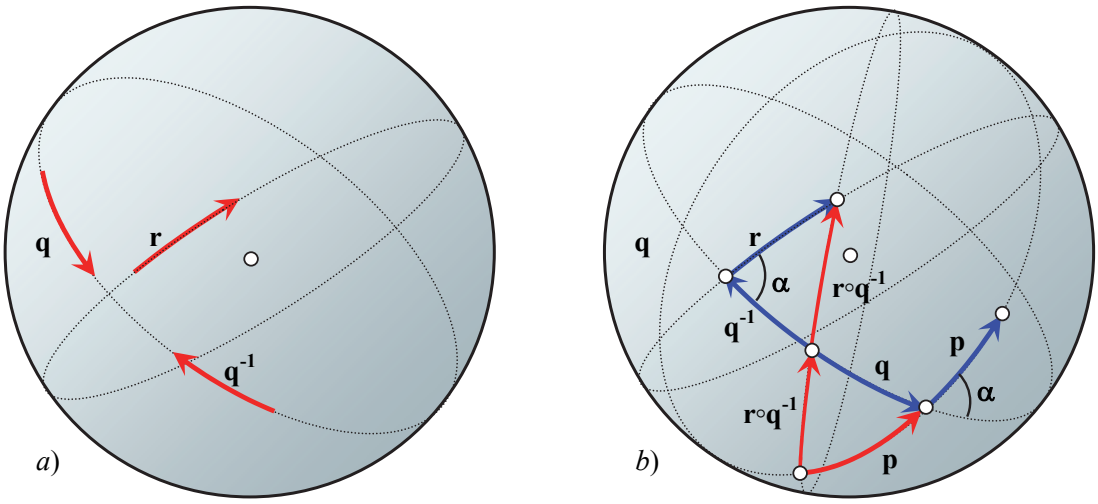


Рис. 2.7. *a*) Кватернионы-сомножители **q, r** и $\mathbf{q}^{-1}$. *b*) Произведения $\mathbf{r}\circ\mathbf{q}^{-1}$ и **p**

На рис. 2.7 *a*) показаны дуги, соответствующие этим кватернионам, а на рис. 2.7 *b*) – как графически получить результат этого тройного произведения. Вначале нужно построить произведение двух сомножителей $\mathbf{r}\circ\mathbf{q}^{-1}$, а затем домножить его слева на кватернион **q**.

Из рисунка видно, что результирующий кватернион **p** представляется дугой, имеющей ту же длину, что и дуга кватерниона **r** и наклоненной к большой окружности кватернионов **q** и $\mathbf{q}^{-1}$ под тем же углом α, что и дуга кватерниона **r**. Таким образом, дуга результирующего кватерниона **p** равна дуге исходного кватерниона **r,** повернутой вокруг единичного вектора кватерниона **q** на удвоенный угол кватерниона **q**.

2.7.7. Верзор суммы двух кватернионов

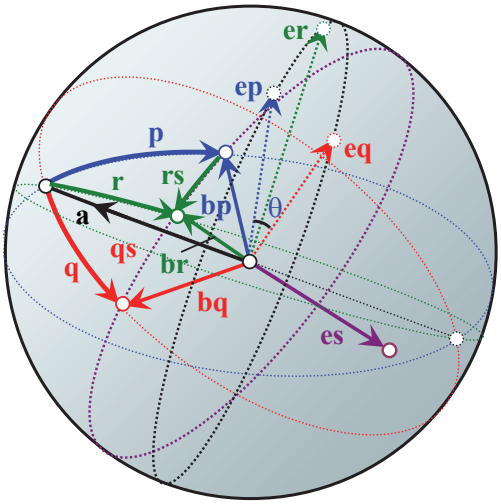


Рис. 2.8. Представление верзора суммы двух кватернионов

Рассмотрим два ненормированных кватерниона:

$$\mathbf{P} = [P_0, P_1, P_2, P_3]; \mathbf{Q} = [Q_0, Q_1, Q_2, Q_3]. \qquad (2.211)$$

Верзоры этих кватернионов (нормированные кватернионы) в соответствии с формулой (2.12) имеют вид:

$$\mathbf{p} = \left[\frac{P_0}{|\mathbf{P}|}, \frac{P_1}{|\mathbf{P}|}, \frac{P_2}{|\mathbf{P}|}, \frac{P_3}{|\mathbf{P}|}\right]; \mathbf{q} = \left[\frac{Q_0}{|\mathbf{Q}|}, \frac{Q_1}{|\mathbf{Q}|}, \frac{Q_2}{|\mathbf{Q}|}, \frac{Q_3}{|\mathbf{Q}|}\right], \qquad (2.212)$$

где $|\mathbf{P}|$ и $|\mathbf{Q}|$ – модули соответствующих кватернионов.

Эти верзоры изображаются на единичной сфере (рис. 2.8) точками, находящимися на концах единичных векторов:

$$\mathbf{ep}=\left[\frac{P_1}{\langle\mathbf{P}\rangle},\frac{P_2}{\langle\mathbf{P}\rangle},\frac{P_3}{\langle\mathbf{P}\rangle}\right]^T;\quad \mathbf{eq}=\left[\frac{Q_1}{\langle\mathbf{Q}\rangle},\frac{Q_2}{\langle\mathbf{Q}\rangle},\frac{Q_3}{\langle\mathbf{Q}\rangle}\right]^T; \tag{2.213}$$

($\langle\mathbf{P}\rangle$ и $\langle\mathbf{Q}\rangle$ – модули векторных частей) и направленными дугами, лежащими на больших окружностях, перпендикулярных этим векторам. Углы этих дуг таковы:

$$\theta p=\arccos\frac{P_0}{|\mathbf{P}|};\quad \theta q=\arccos\frac{Q_0}{|\mathbf{Q}|}. \tag{2.214}$$

Сумма кватернионов **R** и версор этой суммы **r** выражаются формулами:

$$\mathbf{R}=\left[P_0+Q_0,P_1+Q_1,P_2+Q_2,P_3+Q_3\right];\mathbf{r}=\left[\frac{P_0+Q_0}{|\mathbf{P}+\mathbf{Q}|},\frac{P_1+Q_1}{|\mathbf{P}+\mathbf{Q}|},\frac{P_2+Q_2}{|\mathbf{P}+\mathbf{Q}|},\frac{P_3+Q_3}{|\mathbf{P}+\mathbf{Q}|}\right], \tag{2.215}$$

где $|\mathbf{P}+\mathbf{Q}|$ – модуль суммы кватерниона **P+Q**.

Версор суммы кватернионов **r** изображается на единичной сфере точкой, находящейся на конце единичного вектора

$$\mathbf{er}=\left[\frac{P_1+Q_1}{\langle\mathbf{P}+\mathbf{Q}\rangle},\frac{P_2+Q_2}{\langle\mathbf{P}+\mathbf{Q}\rangle},\frac{P_3+Q_3}{\langle\mathbf{P}+\mathbf{Q}\rangle}\right]^T; \tag{2.216}$$

($\langle\mathbf{P}+\mathbf{Q}\rangle$ – модуль векторной части) и направленной дугой, лежащей на большой окружности, перпендикулярной этому вектору (см. рис. 2.8). Угол этой дуги таков:

$$\theta r=\arccos\frac{P_0+Q_0}{|\mathbf{P}+\mathbf{Q}|}. \tag{2.217}$$

Поскольку вектор суммы двух векторов расположен в плоскости векторов-слагаемых, большие круги, перпендикулярные этим векторам, пересекаются по одной прямой, перпендикулярной этой плоскости. Единичный вектор **a**, определяющий направление этой прямой (см. рис. 2.8), выражается формулой:

$$\mathbf{a}=\left[\frac{P_2\cdot Q_3-P_3\cdot Q_2}{\langle\mathbf{P}\rangle\cdot\langle\mathbf{Q}\rangle\cdot\sin\theta},\frac{P_3\cdot Q_1-P_1\cdot Q_3}{\langle\mathbf{P}\rangle\cdot\langle\mathbf{Q}\rangle\cdot\sin\theta},\frac{P_1\cdot Q_2-P_2\cdot Q_1}{\langle\mathbf{P}\rangle\cdot\langle\mathbf{Q}\rangle\cdot\sin\theta}\right]^T, \tag{2.218}$$

где $\langle\mathbf{P}\rangle$ и $\langle\mathbf{Q}\rangle$ – модули векторных частей соответствующих кватернионов;

угол θ между ними, отмеченный на рис. 2.8, выражаемый формулой:

$$\theta=\arccos\frac{P_1\cdot Q_1+P_2\cdot Q_2+P_3\cdot Q_3}{\langle\mathbf{P}\rangle\cdot\langle\mathbf{Q}\rangle}. \tag{2.219}$$

Кроме вектора **a**, введем в рассмотрение единичные векторы **bp**, **bq** и **br** (см. рис. 2.8), соединяющие центр единичной сферы с концами дуг, которые представляют на единичной сфере версоры **p**, **q** и **r** соответственно. При этом полагаем, что начала этих дуг находятся в одной точке на конце единичного вектора **a**.

В соответствии с формулой (2.181) можно записать:

$$\mathbf{p} = \mathbf{bp} \circ \mathbf{a}^{-1}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{bq} \circ \mathbf{a}^{-1}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{br} \circ \mathbf{a}^{-1}. \tag{2.220}$$

По этой причине чисто векторный кватернион **a** называют общим знаменателем нормированных кватернионов **p**, **q** и **r**. Из этих равенств следует:

$$\mathbf{bp} = \mathbf{p} \circ \mathbf{a}; \quad \mathbf{bq} = \mathbf{q} \circ \mathbf{a}; \quad \mathbf{br} = \mathbf{r} \circ \mathbf{a}. \tag{2.221}$$

Можно проверить, что кватернионы **bp**, **bq** и **br** тоже являются чисто векторными.

Воспользовавшись формулами (2.212) и (2.215), запишем:

$$|\mathbf{P}| \cdot \mathbf{bp} = \mathbf{P} \circ \mathbf{a}; \quad |\mathbf{Q}| \cdot \mathbf{bq} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{a}; \quad |\mathbf{P} + \mathbf{Q}| \cdot \mathbf{br} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \circ \mathbf{a}. \tag{2.222}$$

Из этого следует, что

$$|\mathbf{P}| \cdot \mathbf{bp} + |\mathbf{Q}| \cdot \mathbf{bq} - |\mathbf{P} + \mathbf{Q}| \cdot \mathbf{br} = \mathbf{o}, \tag{2.223}$$

где **o** – нулевой кватернион. Таким образом, имеется линейная комбинация векторов **bp**, **bq** и **br** с ненулевыми числовыми коэффициентами, равная нулю. Значит, эти векторы компланарны. Поскольку они единичные и исходят из центра сферы (см. рис. 2.8), их концы лежат на одной большой окружности.

Представляют интерес дуги большой окружности, отсекаемые на ней концами векторов **bp**, **bq** и **br**. Как видно из рис. 2.8, ориентированная дуга **qs** , отсекаемая концами векторов **bp** и **bq,** отображает нормированный кватернион

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{p}^{-1} = \frac{|\mathbf{P}|}{|\mathbf{Q}|} \cdot \mathbf{Q} \circ \mathbf{P}^{-1} = \frac{\mathbf{Q} \circ \overline{\mathbf{P}}}{|\mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}|}. \tag{2.224}$$

Она имеет угловой размер

$$\theta pq = \arccos \frac{P_0 \cdot Q_0 + P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2 + P_3 \cdot Q_3}{|\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}|}. \tag{2.225}$$

Дуга, отсекаемая концами векторов **bp** и **br,** отображает нормированный кватернион

$$\mathbf{r} \circ \mathbf{p}^{-1} = \frac{\mathbf{R} \circ \overline{\mathbf{P}}}{|\mathbf{R}| \cdot |\mathbf{P}|} = \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \circ \overline{\mathbf{P}}}{|\mathbf{P} + \mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}|}. \tag{2.226}$$

Она имеет угловой размер

$$\theta pr = \arccos \frac{(P_0 + Q_0) \cdot P_0 + (P_1 + Q_1) \cdot P_1 + (P_2 + Q_2) \cdot P_2 + (P_3 + Q_3) \cdot P_3}{|\mathbf{P} + \mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}|}. \tag{2.227}$$

С использованием (2.225) можно записать:

$$\theta pr = \arccos \frac{|\mathbf{P}| + |\mathbf{Q}| \cdot \cos \theta pq}{|\mathbf{P} + \mathbf{Q}|}. \tag{2.228}$$

2.7.8. Верзор линейной комбинации двух кватернионов

Продолжим рассмотрение двух ненормированных кватернионов **P** и **Q**, описываемых формулами (2.211)–(2.214). Рассмотрим линейную комбинацию этих кватернионов с числовыми коэффициентами kP и kQ. Компоненты линейной комбинации **U** выражаются формулами:

$$\mathbf{U} = kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} = \left[kP \cdot P_0 + kQ \cdot Q_0, \ldots, kP \cdot P_3 + kQ \cdot Q_3 \right]. \tag{2.229}$$

Ее верзор **u** имеет вид:

$$\mathbf{u} = \frac{kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q}}{\left| kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \right|} = \left[\frac{kP \cdot P_0 + kQ \cdot Q_0}{\left| kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \right|}, \ldots, \frac{kP \cdot P_3 + kQ \cdot Q_3}{\left| kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \right|} \right], \tag{2.230}$$

где $|kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q}|$ – модуль линейной комбинации кватернионов **P** и **Q**.

Этот верзор изображается на единичной сфере точкой, находящейся на конце единичного вектора

$$\mathbf{eu} = \left[\frac{kP \cdot P_1 + kQ \cdot Q_1}{\langle kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \rangle}, \frac{kP \cdot P_2 + kQ \cdot Q_2}{\langle kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \rangle}, \frac{kP \cdot P_3 + kQ \cdot Q_3}{\langle kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \rangle} \right]^T, \tag{2.231}$$

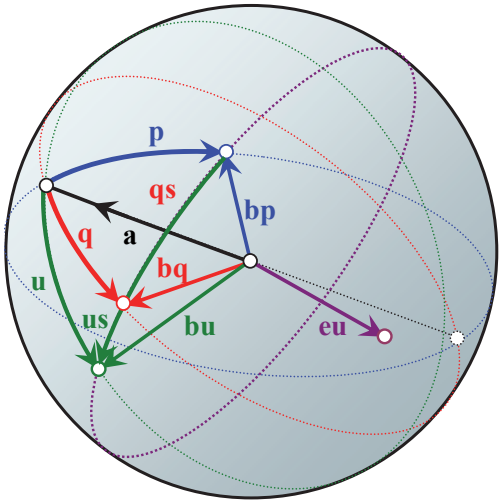


Рис. 2.9. Представление верзора линейной комбинации двух кватернионов

где $\langle kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \rangle$ – модуль векторной части кватерниона $kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q}$, и направленной дугой, лежащей на большой окружности, перпендикулярной этому вектору (см. рис. 2.9). Угол этой дуги таков:

$$\theta u = \arccos \frac{kP \cdot P_0 + kQ \cdot Q_0}{\left| kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \right|}. \tag{2.232}$$

Единичный вектор **bu**, исходящий из центра сферы и приходящий к концу дуги **u**, аналогично формуле (2.221) выражается так:

$$\mathbf{bu} = \mathbf{u} \circ \mathbf{a}. \tag{2.233}$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, приходим к выводу о том, что векторы **bp**, **bq** и **bu** компланарны. Поскольку они единичные и исходят из центра сферы (см. рис. 2.9), их концы лежат на одной большой окружности, а значит и конец дуги **u** лежит на большой окружности, проходящей через концы дуг **p** и **q**.

Дуга, соединяющая конец дуги **p** с концом дуги **u**, имеет угловой размер:

$$\theta pu = \arccos \frac{(kP \cdot P_0 + kQ \cdot Q_0) \cdot kP \cdot P_0 + , \ldots, + (kP \cdot P_3 + kQ \cdot Q_3) \cdot kP \cdot P_3}{\left| kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q} \right| \cdot \left| kP \cdot \mathbf{P} \right|}. \tag{2.234}$$

С использованием формулы (2.225) можно записать:

$$\theta pu = \arccos \frac{\left|kP \cdot \mathbf{P}\right| + \operatorname{sign}(kP) \cdot kQ \cdot \left|\mathbf{Q}\right| \cdot \cos\theta pq}{\left|kP \cdot \mathbf{P} + kQ \cdot \mathbf{Q}\right|}. \tag{2.235}$$

Обратите внимание на присутствие в этой формуле сомножителя sign(kP) – это знак числа kP. Появление этого сомножителя станет понятным при внимательном рассмотрении преобразования формулы (2.234) к виду (2.235).

2.8. Кватернионное представление ориентации твердого тела

В предыдущей главе были рассмотрены стандартные методы описания ориентации твердого тела в трехмерном пространстве, базирующиеся на векторе истинного эйлерова поворота и векторе конечного поворота твердого тела. Эти методы достаточно естественны и понятны, однако формулы сложения поворотов, преобразования координат и кинематические дифференциальные уравнения в этих методах простотой и изяществом не отличаются. В этой главе на базе рассмотренных векторов будут построены кватернионы, позволяющие избавиться от указанных недостатков.

2.8.1. Кватернион истинного эйлерова поворота и половинный экспоненциальный кватернион

Рассмотрим два вида кватернионов, получивших широкое распространение.

Наиболее удобным для определений и формулировок условий задач является кватернион, построенный на базе вектора истинного эйлерова поворота:

$$\boldsymbol{\psi} = \left[0, \psi_1, \psi_2, \psi_3\right]. \tag{2.236}$$

Этот кватернион, аналогично одноименному вектору, определяет такую пространственную ориентацию тела, которая получается из исходной путем одного поворота вокруг вектора с компонентами ψ_1, ψ_2, ψ_3. Угол, на который надо повернуть тело, равен модулю этого вектора:

$$\langle\boldsymbol{\psi}\rangle = \sqrt{\psi_1{}^2 + \psi_2{}^2 + \psi_2{}^2}, \tag{2.237}$$

а знак угла определяется по правилу буравчика.

Второй вид кватерниона, который связан с вектором конечного поворота, также однозначно определяет ориентацию твердого тела. Он является экспонентой половины кватерниона истинного эйлерова поворота:

$$\boldsymbol{\lambda} = \exp\frac{\boldsymbol{\psi}}{2} = \left[\cos\frac{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle}{2}; \frac{\psi_1}{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle} \cdot \sin\frac{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle}{2}; \frac{\psi_2}{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle} \cdot \sin\frac{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle}{2}; \frac{\psi_3}{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle} \cdot \sin\frac{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle}{2}\right]. \tag{2.238}$$

Будем называть этот кватернион половинным экспоненциальным или собственным кватернионом поворота твердого тела. Из формулы (2.238) видно, что при чисто векторном кватернионе $\boldsymbol{\psi}$ половинный экспоненциальный кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ будет нормированным.

Обратный переход от кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ к кватерниону $\boldsymbol{\psi}$ можно выполнить по формуле:

$$\boldsymbol{\psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\,\boldsymbol{\lambda} = 2 \cdot \left[0; \frac{\lambda_1}{\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle} \cdot \theta; \frac{\lambda_2}{\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle} \cdot \theta; \frac{\lambda_3}{\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle} \cdot \theta \right], \tag{2.239}$$

где $\theta = \mathrm{Arg}\,\boldsymbol{\lambda} = \arg \boldsymbol{\lambda} + 2 \cdot \pi \cdot n$;

n – произвольное целое число.

Обратный переход от кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ к кватерниону $\boldsymbol{\psi}$ является неоднозначным, поскольку функция θ принимает бесконечное число значений. Объяснением этого факта служит то, что при повороте твердого тела вокруг любой оси на угол, кратный $2 \cdot \pi$, ориентация тела в пространстве не меняется. Выбор конкретного значения n при решении задач выполняется на основании дополнительных соображений.

Описанные выше кватернионы удобны для вычислений, но носят частный характер. Кватернион $\boldsymbol{\psi}$ является чисто векторным, а кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ – нормированным. Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть кватернион истинного эйлерова поворота содержит ненулевую скалярную часть ψ_0.

$$\boldsymbol{\psi} = \left[\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \right]. \tag{2.240}$$

Этот кватернион, несмотря на это, определяет такой же поворот твердого тела, как и в предыдущей задаче. Физический смысл скалярной части этого кватерниона ψ_0 оставим пока за пределами внимания. Пусть направление векторной части кватерниона $\boldsymbol{\psi}$ определяется единичным чисто векторным кватернионом

$$\mathbf{e} = \left[0, e_1, e_2, e_3 \right], \tag{2.241}$$

а угол поворота действительным числом:

$$\psi_\bullet = \pm \sqrt{{\psi_1}^2 + {\psi_2}^2 + {\psi_2}^2}\,, \tag{2.242}$$

(см. раздел 2.4.1), так чтобы соблюдались соотношения:

$$\psi_j = \psi_\bullet \cdot e_j \quad (j = 1,2,3)\,. \tag{2.243}$$

Знак угла поворота $\psi_\bullet$ может быть выбран любым. В этих обозначениях кватернион $\boldsymbol{\psi}$ можно представить так:

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_0 \cdot \mathbf{i} + \psi_\bullet \cdot \mathbf{e}\,, \tag{2.244}$$

где $\mathbf{i}$ – тождественный кватернион.

Половинный экспоненциальный кватернион тогда будет выражаться формулой:

$$\boldsymbol{\lambda} = \exp \frac{\boldsymbol{\psi}}{2} = \exp \frac{\psi_0}{2} \cdot \left(\mathbf{i} \cdot \cos \frac{\psi_\bullet}{2} + \mathbf{e} \cdot \sin \frac{\psi_\bullet}{2} \right), \tag{2.245}$$

или в подробной записи:

$$\boldsymbol{\lambda} = \exp \frac{\boldsymbol{\psi}}{2} = \exp \frac{\psi_0}{2} \cdot \left[\cos \frac{\psi_\bullet}{2}; e_1 \cdot \sin \frac{\psi_\bullet}{2}; e_2 \cdot \sin \frac{\psi_\bullet}{2}; e_3 \cdot \sin \frac{\psi_\bullet}{2} \right]. \tag{2.246}$$

Для кватерниона истинного эйлерова поворота:

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_0 \cdot \mathbf{i} + \mathbf{e} \cdot (\psi_\bullet + 2 \cdot \pi \cdot k), \tag{2.247}$$

при любом целом k получаем один и тот же половинный экспоненциальный кватернион (2.245). Обратный переход от кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ к кватерниону $\boldsymbol{\psi}$ выполняется по формуле:

$$\boldsymbol{\psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\,\boldsymbol{\lambda} = 2 \cdot \left[\mathbf{i} \cdot \ln|\boldsymbol{\lambda}| + \mathbf{e} \cdot \theta\right] = 2 \cdot \left[\ln|\boldsymbol{\lambda}|; e_1 \cdot \theta; e_2 \cdot \theta; e_3 \cdot \theta\right], \tag{2.248}$$

где $|\boldsymbol{\lambda}|$ – модуль кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$;
$\theta = \mathrm{Arg}\,\boldsymbol{\lambda} = \arg\boldsymbol{\lambda} + 2 \cdot \pi \cdot n$;
n – произвольное целое число.

На основании формулы (9.15) зависимости (2.248) можно переписать так:

$$\boldsymbol{\psi} = \mathrm{Ln}\,\boldsymbol{\lambda}^2 = \left[\mathbf{i} \cdot \ln|\boldsymbol{\lambda}^2| + \mathbf{e} \cdot \chi\right] = \left[\ln|\boldsymbol{\lambda}^2|; e_1 \cdot \chi; e_2 \cdot \chi; e_3 \cdot \chi\right], \tag{2.249}$$

где $|\boldsymbol{\lambda}^2|$ – модуль кватерниона $\boldsymbol{\lambda}^2$;
$\chi = \mathrm{Arg}\,\boldsymbol{\lambda}^2 = \arg\boldsymbol{\lambda}^2 + 2 \cdot \pi \cdot k$;
k – произвольное целое число.

Обратная функция (2.249) из-за многозначности χ также является многозначной. Проверим, все ли значения исходной функции $\boldsymbol{\psi}$, даваемые формулой (2.247), она определяет. Возводя в квадрат выражение (2.245), получим:

$$\boldsymbol{\lambda}^2 = \exp\boldsymbol{\psi} = \exp\psi_0 \cdot \left(\mathbf{i} \cdot \cos\psi_\bullet + \mathbf{e} \cdot \sin\psi_\bullet\right), \tag{2.250}$$

откуда:

$$\ln|\boldsymbol{\lambda}^2| = \psi_0; \quad \chi = \mathrm{Arg}\,\boldsymbol{\lambda}^2 = \psi_\bullet + 2 \cdot \pi \cdot k\,. \tag{2.251}$$

Таким образом, функция (2.249) полностью соответствует формуле (2.247).

Рассматривая отдельно четные и нечетные значения k, можем показать, что и формула (2.248) полностью соответствует формуле (2.247).

Сравнивая кватернионы $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, следует отметить, что кватернион $\boldsymbol{\psi}$ определяет конечный поворот твердого тела, а кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ только ориентацию, которую приобрело тело в результате этого поворота. Имеется в виду следующее. Полный поворот твердого тела (на угол $2 \cdot \pi$) или несколько полных поворотов вокруг некоторой оси не меняют ориентации тела. Угол $\psi_\bullet$, определяемый компонентами ψ_1, ψ_2, ψ_3 может во много раз превосходить значение $2 \cdot \pi$. В кватернионе $\boldsymbol{\lambda}$ эта информация уже не содержится, поскольку там присутствуют лишь синус и косинус этого угла.

Отметим одно важное свойство половинного экспоненциального кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ как функции кватерниона истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\psi}$: при увеличении угла поворота $\psi_\bullet$ на $2 \cdot \pi$ (то есть при каждом полном повороте твердого тела) знак кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ меняется на противоположный. Действительно,

$$\exp\frac{\psi_0}{2} \cdot \left(\mathbf{i} \cdot \cos\frac{\psi_\bullet + 2 \cdot \pi}{2} + \mathbf{e} \cdot \sin\frac{\psi_\bullet + 2 \cdot \pi}{2}\right) = -\exp\frac{\psi_0}{2} \cdot \left(\mathbf{i} \cdot \cos\frac{\psi_\bullet}{2} + \mathbf{e} \cdot \sin\frac{\psi_\bullet}{2}\right). \tag{2.252}$$

Из этого свойства следует, что нечетное число полных поворотов тела меняет знак кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ на противоположный, а четное число полных поворотов оставляет его без изменения.

И еще одно следствие, справедливое для чисто векторного кватерниона $\boldsymbol{\psi}$: одному полному повороту тела (на угол $2\cdot\pi$) соответствует тождественный кватернион со знаком минус ($\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{i}$).

Таким образом, половинный экспоненциальный кватернион содержит информацию не только об ориентации твердого тела, но и информацию о четности или нечетности полных поворотов, приведших тело к этой ориентации.

2.8.2. Привязка кватернионов к системе координат

Так же как и векторные, кватернионные формулы справедливы для любой декартовой системы координат. Важно лишь, чтобы все кватернионы, участвующие в формуле, были представлены в одной и той же координатной системе. Численные же значения компонентов кватерниона зависят от координатной системы, в которой представлен кватернион. Для вычислительных целей часто бывает удобным использовать в одной и той же формуле компоненты кватернионов в разных системах координат. Во избежание путаницы договоримся в этом случае явно указывать координатную систему, в которой записаны компоненты кватерниона, используя для этого левые нижние индексы. Например, кватернион $\mathbf{p}$, компоненты которого представлены в неподвижной системе координат x_1, x_2, x_3, будем обозначать ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}$. Тот же кватернион, компоненты которого представлены в подвижной системе координат y_1, y_2, y_3, связанной с телом, будем обозначать ${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p}$.

2.8.3. Преобразование координат

С помощью половинного экспоненциального кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$, определяемого формулой (2.238), можно выполнять преобразование компонентов кватернионов при переходе от подвижной системы координат к неподвижной и наоборот.

Если, например, известны компоненты некоторого кватерниона ${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p}$ в подвижной системе координат y_1, y_2, y_3, связанной с телом, то компоненты этого же кватерниона ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}$ в неподвижной системе координат x_1, x_2, x_3 можно определить по формуле:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}. \qquad (2.253) $$

С использованием формулы (2.238) формулу (2.253) можно записать так:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} = \exp\frac{{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\psi}}{2} \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p} \circ \exp\left(-\frac{{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\psi}}{2}\right). \qquad (2.254) $$

Обратное преобразование имеет такой вид:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\lambda}; \qquad (2.255) $$

или такой:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p} = \exp\left(-\frac{{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\psi}}{2}\right) \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} \circ \exp\frac{{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\psi}}{2}. \qquad (2.256) $$

Заметим, что компоненты λ и ψ в неподвижной и подвижной системах координат совпадают. Скалярная часть любого кватерниона при переходе от одной координатной системы к другой не меняется.

2.8.4. Сложение поворотов

Чаще всего не удается сразу написать кватернион, соответствующий повороту тела, соответствующему физическому смыслу задачи. Проще это сделать, выполнив последовательно несколько элементарных поворотов и просуммировав их.

За начальное положение подвижного тела принимается такое, при котором неподвижная и подвижная системы координат совпадают. Пусть вначале был выполнен поворот тела, определяемый половинным экспоненциальным кватернионом $_{X}\mathbf{p1}$, а затем поворот, определяемый половинным экспоненциальным кватернионом $_{X}\mathbf{p2}$, представленными в неподвижной системе координат. Половинный экспоненциальный кватернион результирующего поворота в неподвижной системе координат определяется формулой:

$$_{X}\mathbf{p} = {}_{X}\mathbf{p2} \circ {}_{X}\mathbf{p1}, \tag{2.257}$$

которая называется формулой сложения поворотов. Она по индукции распространяется на любое число последовательно выполненных поворотов:

$$_{X}\mathbf{p} = {}_{X}\mathbf{pn} \circ \ldots \circ {}_{X}\mathbf{p2} \circ {}_{X}\mathbf{p1}. \tag{2.258}$$

Заметим, что сомножители в этой формуле следуют в порядке справа налево. Это нужно строго соблюдать, поскольку операция умножения кватернионов некоммутативна.

Иногда бывает удобно представлять кватернионы элементарных поворотов в подвижной системе координат. В этом случае вместо формулы (2.258) следует пользоваться следующей формулой:

$$_{X}\mathbf{p} = {}_{Y}\mathbf{p1} \circ {}_{Y}\mathbf{p2} \circ \ldots \circ {}_{Y}\mathbf{pn}. \tag{2.259}$$

Можно чередовать повороты, представленные то в неподвижной, то в подвижной системе координат. В этом случае составление выражения для суммарного поворота надо делать, приписывая каждый последующий кватернион слева от уже составленного выражения, если он представлен в неподвижной системе координат, и справа от выражения, если он представлен в подвижной системе координат. Например, если последовательно выполняются повороты $_{Y}\mathbf{p1}$, $_{Y}\mathbf{p2}$, $_{X}\mathbf{p3}$, $_{Y}\mathbf{p4}$, $_{X}\mathbf{p5}$, $_{X}\mathbf{p6}$, правильным будет выражение:

$$_{X}\mathbf{p} = {}_{X}\mathbf{p6} \circ {}_{X}\mathbf{p5} \circ {}_{X}\mathbf{p3} \circ {}_{Y}\mathbf{p1} \circ {}_{Y}\mathbf{p2} \circ {}_{Y}\mathbf{p4}. \tag{2.260}$$

Если результат должен быть представлен в подвижной системе координат, кватернионы элементарных поворотов располагаются в обратном порядке.

$$_{Y}\mathbf{p} = {}_{X}\mathbf{p1} \circ {}_{X}\mathbf{p2} \circ \ldots \circ {}_{X}\mathbf{pn}; \tag{2.261}$$

$$_{Y}\mathbf{p} = {}_{Y}\mathbf{pn} \circ \ldots \circ {}_{Y}\mathbf{p2} \circ {}_{Y}\mathbf{p1}. \tag{2.262}$$

Здесь приведены правила сложения поворотов, заданных половинными экспоненциальными кватернионами. Сложение поворотов, заданных кватернионами истинного эйлерова поворота используется редко, поскольку расчетные формулы оказываются весьма сложными. Тем не менее, можно записать компактную формулу для выполнения этой операции, используя аналитические функции кватернионов (см. п. 2.4.2):

$$\mathrm{x}\boldsymbol{\psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\left(\exp \frac{\mathrm{x}\boldsymbol{\psi 2}}{2} \circ \exp \frac{\mathrm{x}\boldsymbol{\psi 1}}{2} \right), \tag{2.263}$$

где $\mathrm{x}\boldsymbol{\psi 1}$, $\mathrm{x}\boldsymbol{\psi 2}$, $\mathrm{x}\boldsymbol{\psi}$ – кватернионы истинного эйлерова поворота для первого, второго и суммарного поворотов соответственно в неподвижной системе координат. Эта формула может быть обобщена на последовательности, состоящие более чем из двух поворотов.

Операция сложения последовательно выполненных поворотов часто применяется для получения кватерниона, характеризующего трудноописуемое положение твердого тела в пространстве. Это положение обычно определяется как результат последовательности элементарных поворотов и таким же способом вычисляется соответствующий кватернион. Кватернионы некоторых элементарных поворотов приведены в приложении 9.3.

2.9. Связь с другими методами представления ориентации тела

2.9.1. Матрица направляющих косинусов

Ориентация твердого тела в пространстве наиболее просто и естественно описывается матрицей направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.264}$$

Геометрический смысл элементов этой матрицы – скалярные произведения ортов неподвижной системы координат **X** и ортов подвижной системы координат **Y**. Этот метод представления ориентации подробно описан в разделе 1.4.2. Для каждого метода представления полезно знать формулы перехода от параметров, описывающих ориентацию твердого тела, к элементам этой матрицы.

Запишем известные формулы, выражающие элементы матрицы преобразования **A** через элементы нормированного половинного экспоненциального кватерниона:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot q_2 \cdot q_1 - 2 \cdot q_3 \cdot q_0 & 2 \cdot q_3 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 \cdot q_0 \\ 2 \cdot q_2 \cdot q_1 + 2 \cdot q_3 \cdot q_0 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot q_2 \cdot q_3 - 2 \cdot q_1 \cdot q_0 \\ 2 \cdot q_3 \cdot q_1 - 2 \cdot q_2 \cdot q_0 & 2 \cdot q_2 \cdot q_3 + 2 \cdot q_1 \cdot q_0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \tag{2.265}$$

Заметим, что детерминант этой матрицы, равный единице, вычисляется по формуле:

$$\det \mathbf{A} = \|\mathbf{q}\|^3 = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^3 = 1, \tag{2.266}$$

что соответствует условию нормировки кватерниона.

Полезно знать и обратные зависимости, связывающие элементы матрицы направляющих косинусов, с компонентами нормированного половинного экспоненциального кватерниона. Из формул (2.265) вытекают следующие:

$$\begin{aligned} 4\cdot q_0^2 = 1+a_{11}+a_{22}+a_{33};\ 4\cdot q_0\cdot q_1 = a_{32}-a_{23};\ 4\cdot q_0\cdot q_2 = a_{13}-a_{31};\ 4\cdot q_0\cdot q_3 = a_{21}-a_{12};\\ 4\cdot q_1^2 = 1+a_{11}-a_{22}-a_{33};\ 4\cdot q_1\cdot q_2 = a_{12}+a_{21};\ 4\cdot q_1\cdot q_3 = a_{13}+a_{31};\\ 4\cdot q_2^2 = 1-a_{11}+a_{22}-a_{33};\ 4\cdot q_2\cdot q_3 = a_{23}+a_{32};\\ 4\cdot q_3^2 = 1-a_{11}-a_{22}+a_{33}. \end{aligned} \tag{2.267}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+a_{11}+a_{22}+a_{33} & a_{32}-a_{23} & a_{13}-a_{31} & a_{21}-a_{12} \\ a_{32}-a_{23} & 1+a_{11}-a_{22}-a_{33} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} \\ a_{13}-a_{31} & a_{12}+a_{21} & 1-a_{11}+a_{22}-a_{33} & a_{23}+a_{32} \\ a_{21}-a_{12} & a_{13}+a_{31} & a_{23}+a_{32} & 1-a_{11}-a_{22}+a_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.268}$$

то будут справедливы зависимости:

$$4\cdot q_j\cdot q_k = B_{jk} \quad (j,k = 0,1,2,3). \tag{2.269}$$

Из этих зависимостей можно получить четыре варианта формул для определения компонентов половинного экспоненциального кватерниона [74].

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \\ \dfrac{a_{32}-a_{23}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \\ \dfrac{a_{13}-a_{31}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \\ \dfrac{a_{21}-a_{12}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \end{bmatrix};\quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{32}-a_{23}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \\ \dfrac{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \\ \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \\ \dfrac{a_{13}+a_{31}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \end{bmatrix}; \tag{2.270}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{13}-a_{31}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \\ \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \\ \dfrac{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \\ \dfrac{a_{23}+a_{32}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \end{bmatrix};\quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{21}-a_{12}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \\ \dfrac{a_{13}+a_{31}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \\ \dfrac{a_{23}+a_{32}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \\ \dfrac{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \end{bmatrix}. \tag{2.271}$$

При пользовании формулами (2.270), (2.271) возможен случай, когда формула для определения компонентов кватерниона содержит неопределенность типа 0/0. В этом случае надо отказаться от такой формулы, а из оставшихся формул выбрать ту, в которой знаменатель отличен от нуля. Можно воспользоваться также формулой:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}} \\ \pm\sqrt{1 + a_{11} - a_{22} - a_{33}} \\ \pm\sqrt{1 - a_{11} + a_{22} - a_{33}} \\ \pm\sqrt{1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}} \end{bmatrix}, \qquad (2.272)$$

где знаки компонентов выбираются в соответствии с таким правилом: знаки ненулевых компонентов q_j и q_k одинаковы, если в формуле (2.268) $b_{jk} > 0$, и противоположные, если в формуле (2.268) $b_{jk} < 0$. Знак одного из компонентов кватерниона **q** можно принять произвольным. Если $q_0 \neq 0$, удобно принять его положительным.

2.9.2. Углы Эйлера

Весьма распространенным методом определения ориентации твердого тела в трехмерном пространстве является метод углов Эйлера, обычно обозначающихся ψ, θ, φ. Как и ранее, рассматривается неподвижная система координат x_1, x_2, x_3, связанная с "землей" и подвижная система координат y_1, y_2, y_3 , связанная с телом, начала которых совпадают.

В начальном положении тело расположено так, что соответствующие оси y и x совпадают. В этом положении все углы Эйлера равны нулю. Чтобы определить положение тела, соответствующее заданным углам Эйлера, выполним следующее. Сначала тело повернем на угол ψ вокруг оси y_3. При этом оси y_1 и y_2 отойдут от осей x_1 и x_2 на угол ψ. Затем тело повернем вокруг оси y_1 на угол θ. Ось y_3 отойдет от оси x_3 на угол θ. Наконец, тело повернем вокруг нового положения оси y_3 на угол φ. Это положение тела и будет соответствовать углам Эйлера ψ, θ, φ.

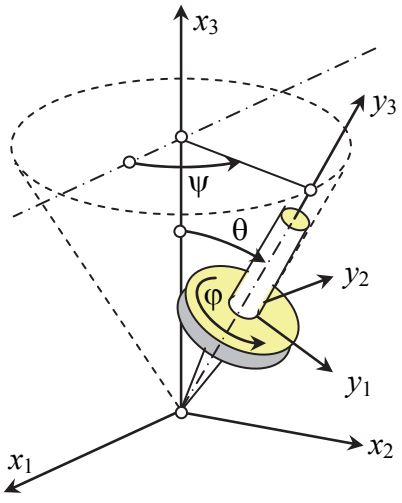


Рис. 2.10. Волчок и углы Эйлера

Угол ψ называется углом прецессии (precession), угол θ – углом нутации (nutation), угол φ – углом собственного вращения. Эти названия углов пришли из теории гироскопов. Разобраться в углах Эйлера удобнее всего на примере вращающегося волчка (рис. 2.10). Ось волчка y_3 описывает конус вокруг неподвижной оси x_3. Это вращение определяется углом ψ (говорят, волчок совершает прецессию). Отклонение оси волчка от вертикали – угол нутации θ. Вращение волчка вокруг своей оси y_3, определяемое углом φ – собственное вращение.

Таким образом, Эйлер предложил произвольный поворот тела разложить на три элементарных поворота, выполняемых вокруг осей подвижной системы координат. Запишем для них кватернионы

истинных эйлеровых поворотов:

$$\mathbf{u1} = [0; 0; 0; \psi]; \quad \mathbf{u2} = [0; \theta; 0; 0]; \quad \mathbf{u3} = [0; 0; 0; \varphi]. \tag{2.273}$$

На основании этих формул запишем половинные экспоненциальные кватернионы:

$$\mathbf{p1} = [\cos\frac{\psi}{2}; 0; 0; \sin\frac{\psi}{2}]; \quad \mathbf{p2} = [\cos\frac{\theta}{2}; \sin\frac{\theta}{2}; 0; 0]; \quad \mathbf{p3} = [\cos\frac{\varphi}{2}; 0; 0; \sin\frac{\varphi}{2}]. \tag{2.274}$$

Половинный экспоненциальный кватернион суммарного поворота на основании формулы (2.259) будет выражаться так:

$$\mathbf{qe} = \mathbf{p1} \circ \mathbf{p2} \circ \mathbf{p3}. \tag{2.275}$$

Перемножая кватернионы-сомножители, получим:

$$\mathbf{qe} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\psi}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\psi}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\psi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\psi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\psi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\psi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\psi}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\psi}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\psi+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\psi-\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\psi-\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\psi+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.276}$$

Обращение этих зависимостей приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} &\psi = \operatorname{atan2}(qe_0 \cdot qe_1 - qe_2 \cdot qe_3; \quad qe_0 \cdot qe_2 + qe_3 \cdot qe_1); \\ &\theta = \arccos(qe_0^2 - qe_1^2 - qe_2^2 + qe_3^2); \\ &\varphi = \operatorname{atan2}(qe_0 \cdot qe_1 + qe_2 \cdot qe_3; \quad qe_0 \cdot qe_2 - qe_3 \cdot qe_1). \end{aligned} \tag{2.277}$$

2.9.3. Корабельные углы Крылова и самолетные углы

Еще один метод для описания ориентации твердого тела в трехмерном пространстве предложен А. Н. Крыловым. Изучая качку корабля [35], он ввел независимые параметры, отличающиеся от эйлеровых, которые описывают перемещения корабля на волнении и более удобны для расчетов. Они определяются корабельными осями, связанными с корпусом судна (рис. 2.11). С осью x связан угол крена θ_1, с осью y – угол дифферента ψ, с осью z – угол рыскания.

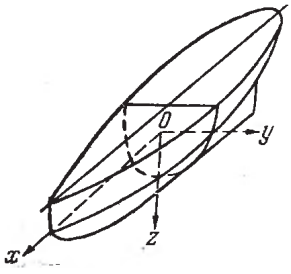


Рис. 2.11. Корабельные оси


А. Н. Крылов (1863–1945)

Аналогичная система координат применяется в авиации. При этом в качестве связанной с самолетом подвижной системы координат y_1, y_2, y_3 выбирается стандартная самолетная координатная система. Ее оси показаны на рис. 2.12. Ось y_1 называется осью крена (roll), ось y_2 – осью тангажа (pitch) и ось y_3 – осью скольжения (yaw). Разница заключается в том, что корабельная система – левая, а самолетная – правая. Поскольку в технике преимущество отдается правой системе координат, дальнейшее изложение будет вестись в самолетной терминологии. Твердое тело будем представлять в виде самолета. Его ориентацию в трехмерном пространстве будем определять углами α, β, γ.

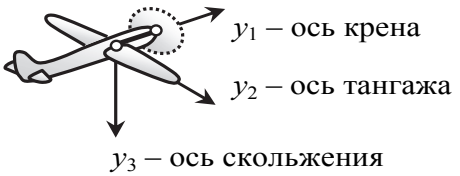


Рис. 2.12. Самолетные оси

Для того чтобы установить, какое положение тела соответствует этим углам, рассмотрим начальное положение этого тела, в котором подвижная система координат y_1, y_2, y_3 совпадает с неподвижной системой координат x_1, x_2, x_3. В этом положении все три угла равны нулю. После этого выполняется поворот тела вокруг оси крена y_1, на угол α. Далее выполняется поворот тела вокруг нового положения оси тангажа y_2, на угол β, а затем вокруг нового положения оси скольжения y_3 на угол γ. После этих трех поворотов тело приходит в окончательное положение, определяемое углами α, β, γ. Запишем для них кватернионы истинных эйлеровых поворотов в подвижной системе координат:

$$\mathbf{u1} = [0; \alpha; 0; 0]; \quad \mathbf{u2} = [0; 0; \beta; 0]; \quad \mathbf{u3} = [0; 0; 0; \gamma]. \tag{2.278}$$

На основании этих формул запишем половинные экспоненциальные кватернионы:

$$\mathbf{p1} = [\cos\frac{\alpha}{2}; \sin\frac{\alpha}{2}; 0; 0]; \quad \mathbf{p2} = [\cos\frac{\beta}{2}; 0; \sin\frac{\beta}{2}; 0]; \quad \mathbf{p3} = [\cos\frac{\gamma}{2}; 0; 0; \sin\frac{\gamma}{2}]. \tag{2.279}$$

Поскольку все повороты выполнялись вокруг осей подвижной системы координат, половинный экспоненциальный кватернион суммы поворота будет выражен так:

$$\mathbf{qk} = \mathbf{p1} \circ \mathbf{p2} \circ \mathbf{p3}. \tag{2.280}$$

Перемножая кватернионы-сомножители, получим:

$$\mathbf{qk} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.281}$$

Обращение этих зависимостей приводит к следующему результату:

$$\alpha = \operatorname{atan2}(qk_0^2 - qk_1^2 - qk_2^2 + qk_3^2;\quad 2\cdot qk_0\cdot qk_1 - 2\cdot qk_3\cdot qk_2);$$
$$\beta = \arcsin(2\cdot qk_0\cdot qk_2 - 2\cdot qk_1\cdot qk_3); \qquad (2.282)$$
$$\gamma = \operatorname{atan2}(qk_0^2 + qk_1^2 - qk_2^2 - qk_3^2;\quad 2\cdot qk_0\cdot qk_3 - 2\cdot qk_2\cdot qk_1).$$

2.10. Кинематические уравнения

Рассмотрим задачу о движении твердого тела с одной неподвижной точкой, то есть о его вращении. Ориентация этого тела будет функцией времени t. Как и ранее, существуют неподвижная система координат $\mathbf{X}$ с координатными осями x_1, x_2, x_3 и подвижная система координат $\mathbf{Y}(t)$ с координатными осями $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, соединенная с телом и являющаяся функцией времени t. Будем полагать, что координатную систему $\mathbf{Y}(t)$ можно получить путем одного истинного эйлерова поворота неподвижной системы $\mathbf{X}$, характеризуемого кватернионом $_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\psi}(t)$, вокруг вектора с компонентами $_{\mathbf{X}}\psi_1(t)$, $_{\mathbf{X}}\psi_2(t)$, $_{\mathbf{X}}\psi_3(t)$ на угол, равный величине этого вектора:

$$\boldsymbol{\psi}_{\bullet}(t) = \pm\sqrt{{}_{\mathbf{X}}\psi_1^2(t) + {}_{\mathbf{X}}\psi_2^2(t) + {}_{\mathbf{X}}\psi_3^2(t)}\,. \qquad (2.283)$$

Направление поворота определяется по правилу буравчика. Здесь для общности мы пользуемся не модулем, а величиной вектора (см. раздел 2.4.1).

Этому кватерниону соответствует половинный экспоненциальный кватернион, он же собственный кватернион этого поворота:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \exp\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2}. \qquad (2.284)$$

Заметим, что компоненты кватерниона $\boldsymbol{\lambda}(t)$ одинаковы в неподвижной $\mathbf{X}$ и подвижной $\mathbf{Y}(t)$ системах координат. Как следует из формулы (2.284), это же свойство соблюдается и для кватерниона $\boldsymbol{\psi}(t)$.

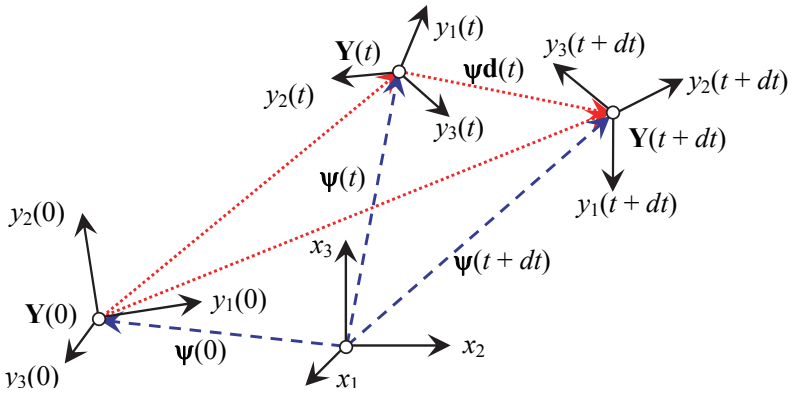


Рис. 2.13. Три ориентации твердого тела

Рассмотрим три ориентации твердого тела в моменты времени соответственно 0, t, $t + dt$ (рис. 2.13), где dt – бесконечно малый промежуток времени. Несмотря на то, что мы рассматриваем движение твердого тела вокруг одной неподвижной точки, три ориентации тела, показанные на рисунке, зрительно разнесены для того, чтобы легче было различать координатные системы $\mathbf{Y}(0)$, $\mathbf{Y}(t)$, $\mathbf{Y}(t + dt)$, характеризующие

эти ориентации. Стрелками на этом рисунке мнемонически обозначены повороты тела, переводящие координатную систему, находящуюся в начале стрелки, в координатную систему, находящуюся в конце стрелки. Рядом со стрелкой обозначены кватернионы истинных эйлеровых поворотов.

Для примера рассмотрим стрелку, обозначенную символом кватерниона $\boldsymbol{\psi}(0)$. В начале этой стрелки находится координатная система **X**, а в конце стрелки – координатная система **Y**(0). Эта стрелка означает: для того, чтобы совместить координатную систему **X** с координатной системой **Y**(0), надо повернуть систему **X** вокруг вектора кватерниона $\boldsymbol{\psi}(0)$ на угол $\boldsymbol{\psi}_\bullet(0)$.

Переход от неподвижной координатной системы **X** к подвижным координатным системам **Y**(0), **Y**(t), **Y**($t + dt$) выполняется истинными эйлеровыми поворотами, определяемыми кватернионами $\boldsymbol{\psi}(0)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t + dt)$. Им соответствуют половинные экспоненциальные кватернионы $\boldsymbol{\lambda}(0)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t + dt)$.

2.10.1. Кинематическое уравнение для половинного экспоненциального кватерниона

Рассмотрим поворот тела, переводящий систему координат **Y**(t) в систему координат **Y**($t + dt$). Пусть этот поворот характеризуется кватернионом истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\psi}\mathbf{d}(t)$ и половинным экспоненциальным кватернионом $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t)$. По правилу сложения поворотов (см. раздел 2.8.4) можно написать:

$$\boldsymbol{\lambda}(t+dt) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t) \circ \boldsymbol{\lambda}(t)\,. \tag{2.285}$$

С другой стороны, кватернион $\boldsymbol{\lambda}(t + dt)$ можно получить, прибавляя к кватерниону $\boldsymbol{\lambda}(t)$ некоторое слагаемое $\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)$:

$$\boldsymbol{\lambda}(t+dt) = \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)\,, \tag{2.286}$$

являющееся обычным дифференциалом кватерниона $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Это слагаемое можно определить из равенства

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t) \circ \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{2.287}$$

следующим образом:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t) \circ \boldsymbol{\lambda}(t) - \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t) \circ \boldsymbol{\lambda}(t) - \mathbf{i} \circ \boldsymbol{\lambda}(t) = \left[\boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t) - \mathbf{i}\right] \circ \boldsymbol{\lambda}(t)\,, \tag{2.288}$$

где i – тождественный кватернион.

Заметим, что истинный эйлеров поворот $\boldsymbol{\psi}\mathbf{d}(t)$ является бесконечно малым и выполняется за бесконечно малое время dt с некоторой конечной угловой скоростью. Пусть эта скорость определяется кватернионом $\boldsymbol{\omega}(t)$. При такой угловой скорости за время dt тело поворачивается вокруг вектора с компонентами $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ на угол $\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt$. Для общности будем полагать, что этот угол не обязательно положителен (см. раздел 2.4.1), а компонент $\omega_0(t)$ может быть ненулевым, хотя он в наших рассуждениях роли не играет и может быть любой числовой функцией времени. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\boldsymbol{\psi}\mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \cdot dt\,. \tag{2.289}$$

Половинный экспоненциальный кватернион будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t)=\exp\frac{\omega_0(t)\cdot dt}{2}\cdot\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt}{2}\\ \dfrac{\omega_1(t)}{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)}\cdot\sin\dfrac{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt}{2}\\ \dfrac{\omega_2(t)}{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)}\cdot\sin\dfrac{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt}{2}\\ \dfrac{\omega_3(t)}{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)}\cdot\sin\dfrac{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt}{2}\end{bmatrix}. \tag{2.290}$$

Учитывая то, что при бесконечно малых аргументах:

$$\exp\frac{\omega_0(t)\cdot dt}{2}=1+\frac{\omega_0(t)\cdot dt}{2};\quad \cos\frac{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt}{2}=1;\quad \sin\frac{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt}{2}=\frac{\boldsymbol{\omega}_\bullet(t)\cdot dt}{2}; \tag{2.291}$$

получим:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}(t)=\left[1+\frac{\omega_0(t)\cdot dt}{2};\quad \frac{\omega_1(t)\cdot dt}{2};\quad \frac{\omega_2(t)\cdot dt}{2};\quad \frac{\omega_3(t)\cdot dt}{2}\right]=\mathbf{i}+\frac{\boldsymbol{\omega}(t)\cdot dt}{2}. \tag{2.292}$$

Подставив полученный результат в формулу (2.288), будем иметь:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)\cdot dt}{2}\circ\boldsymbol{\lambda}(t). \tag{2.293}$$

Отсюда получаем фундаментальное кинематическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)}{dt}=\boldsymbol{\lambda}'(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{2}\circ\boldsymbol{\lambda}(t), \tag{2.294}$$

связывающее половинный экспоненциальный кватернион, он же собственный кватернион поворота $\boldsymbol{\lambda}(t)$, со скоростью вращения тела $\boldsymbol{\omega}(t)$. Это уравнение справедливо как в неподвижной системе координат $\mathbf{X}$, так и в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$.

В силу формулы (2.284) можно записать:

$$\boldsymbol{\lambda}(t+dt)=\exp\frac{\boldsymbol{\psi}(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\cdot dt}{2}. \tag{2.295}$$

В практических задачах скорость вращения тела обычно бывает задана в подвижной системе координат. С использованием формулы (2.253) можно перейти к уравнению

$$\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)}{dt}={}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t)=\boldsymbol{\lambda}(t)\circ\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)}{2}, \tag{2.296}$$

наиболее приспособленному для решения практических задач.

Если по каким-то причинам удобно работать в подвижной системе координат, можно воспользоваться следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)}{dt} = {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\lambda}'(t) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)}{2} \circ \boldsymbol{\lambda}(t)\,. \tag{2.297}$$

Запишем кинематическое уравнение для половинного экспоненциального кватерниона с использованием мультипликативной производной (см. раздел 2.6.2). Воспользовавшись формулой перехода от обычной производной к мультипликативной (2.142), на основании (2.297) получим:

$$\boldsymbol{\lambda}^{\times}(t) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)}{2}\,. \tag{2.298}$$

Как видно из этой формулы, мультипликативная производная половинного экспоненциального кватерниона равна половине кватерниона угловой скорости. В связи с этим, кинематическое уравнение в мультипликативных терминах оказывается предельно простым.

Общее решение этого дифференциального уравнения с использованием формулы (2.162) может быть выражено через мультипликативную квадратуру:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}(0) \circ \prod_{0}^{t} \underrightarrow{\exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y}(\tau)}\boldsymbol{\omega}(\tau)}{2} \cdot d\tau\right]} = \boldsymbol{\lambda}(0) \circ \prod_{0}^{t} \underrightarrow{\left[\mathbf{i} + \frac{{}_{\mathbf{Y}(\tau)}\boldsymbol{\omega}(\tau)}{2} \cdot d\tau\right]}, \tag{2.299}$$

где $\mathbf{i}$ – тождественный кватернион. Это решение содержит произвольный постоянный кватернион $\boldsymbol{\lambda}(0)$, равный половинному экспоненциальному от $\boldsymbol{\psi}(t)$ при $t = 0$.

2.10.2. Кинематическое уравнение для кватерниона истинного эйлерова поворота

Для перехода к другой переменной $\boldsymbol{\psi}(t)$ – кватерниону истинного эйлерова поворота тела – воспользуемся материалом раздела 2.5, где речь идет о связи между дифференциалами кватерниона-аргумента и кватерниона-функции. Как было определено выше, переменные $\boldsymbol{\psi}(t)$ и $\boldsymbol{\lambda}(t)$ связаны следующей функциональной зависимостью:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \exp\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2}\,, \tag{2.300}$$

в которой $\boldsymbol{\psi}(t)$ выступает в качестве аргумента, а $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – в качестве функции.

С целью получения кинематического уравнения для кватерниона истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\psi}(t)$ можно воспользоваться формулой (2.102), которая в принятых обозначениях имеет вид:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}^{-1}(t) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{c}(t); \quad \mathbf{d}\boldsymbol{\psi}\mathbf{n}(t) = T^{-1}(t) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n}(t)\,, \tag{2.301}$$

откуда по формуле (2.98) находится выражение для дифференциала аргумента $\boldsymbol{\psi}(t)$:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{d}^{-1}(t) \circ \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{c}(t) + T^{-1}(t) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n}(t)\,. \tag{2.302}$$

В этих формулах $\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{c}(t)$ и $\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n}(t)$ – коллинеарная и нормальная составляющие дифференциала функции $\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)$, определяемого формулой (2.296), по отношению к

векторной части кватерниона-аргумента $\boldsymbol{\psi}(t)$. $\mathbf{d}^{-1}(t)$ – кватернионная функция, обратная кватернионной функции-производной по отношению к функции (2.300):

$$\mathbf{d}(t)=\frac{1}{2}\cdot\exp\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2};\quad \mathbf{d}^{-1}(t)=2\cdot\exp\left(-\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2}\right), \tag{2.303}$$

$T^{-1}(t)$ функция, определяемая на основании формулы (9.27):

$$T(t)=\frac{1}{\psi_{\bullet}(t)}\cdot\exp\frac{\psi_0(t)}{2}\cdot\sin\frac{\psi_{\bullet}(t)}{2};\quad T^{-1}(t)=\psi_{\bullet}(t)\cdot\left(\exp\frac{\psi_0(t)}{2}\cdot\sin\frac{\psi_{\bullet}(t)}{2}\right)^{-1}. \tag{2.304}$$

Далее следует определить коллинеарную составляющую дифференциала $\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}(t)$ по отношению к векторной части кватерниона $\boldsymbol{\psi}(t)$, единичный вектор которого имеет вид:

$$\mathbf{e}(t)=\left[0;e_1(t);e_2(t);e_3(t)\right]=\left[0;\frac{\psi_1(t)}{\psi_{\bullet}(t)};\frac{\psi_2(t)}{\psi_{\bullet}(t)};\frac{\psi_3(t)}{\psi_{\bullet}(t)}\right]. \tag{2.305}$$

Воспользуемся для этого формулой (2.293) и формулами (2.91), из которых следует:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{c}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)\circ\boldsymbol{\lambda}(t)-\mathbf{e}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\circ\boldsymbol{\lambda}(t)\circ\mathbf{e}(t)}{4}\cdot dt;\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)\circ\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{e}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\circ\boldsymbol{\lambda}(t)\circ\mathbf{e}(t)}{4}\cdot dt\,. \tag{2.306}$$

Учитывая то, что $\boldsymbol{\psi}(t)$, и как следствие, $\boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\mathbf{e}(t)$ кватернионы коллинеарные, а, значит, коммутируют, можем записать:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{c}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)-\mathbf{e}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\circ\mathbf{e}(t)}{4}\circ\boldsymbol{\lambda}(t)\cdot dt;\quad \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)+\mathbf{e}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\circ\mathbf{e}(t)}{4}\circ\boldsymbol{\lambda}(t)\cdot dt\,. \tag{2.307}$$

Если, возвращаясь к формуле (2.91), ввести в рассмотрение коллинеарную $\boldsymbol{\omega}\mathbf{c}(t)$ и нормальную $\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}(t)$ составляющие кватерниона $\boldsymbol{\omega}(t)$:

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{c}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)-\mathbf{e}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\circ\mathbf{e}(t)}{2};\quad \boldsymbol{\omega}\mathbf{n}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}(t)+\mathbf{e}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\circ\mathbf{e}(t)}{2} \tag{2.308}$$

и заменить $\boldsymbol{\lambda}(t)$ по формуле (2.300), то выражения (2.307) будут выглядеть так:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{c}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{c}(t)}{2}\circ\exp\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2}\cdot dt;\quad \mathbf{d}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{n}(t)=\frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}(t)}{2}\circ\exp\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2}\cdot dt\,. \tag{2.309}$$

Подставляя в формулу (2.302) выражения из формул (2.303), (2.304), (2.307), придем к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}(t)}{dt}=\boldsymbol{\omega}\mathbf{c}(t)+\frac{\psi_{\bullet}(t)\cdot\dfrac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}(t)}{2}\circ\exp\dfrac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2}}{\exp\dfrac{\psi_0(t)}{2}\cdot\sin\dfrac{\psi_{\bullet}(t)}{2}}. \tag{2.310}$$

Эта зависимость справедлива, если все входящие в нее кватернионы представлены в одной и той же системе координат. Распространенной является задача, когда

кватернион скорости представлен в подвижной (связанной с телом) системе координат, а дифференциал кватерниона истинного эйлерова поворота – в подвижной. В этом случае дифференциальное уравнение (2.310) приобретет вид:

$$\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{c}(t) + \frac{\psi_{\bullet}(t)\cdot\exp\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{2}\circ\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}(t)}{2}}{\exp\frac{\psi_0(t)}{2}\cdot\sin\frac{\psi_{\bullet}(t)}{2}}. \tag{2.311}$$

Заметим, что кватернионы $\boldsymbol{\psi}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}\mathbf{c}(t)$ коллинеарны и имеют одинаковые компоненты как в неподвижной, так и в подвижной системах координат. Поэтому в их обозначениях отсутствуют указания на систему координат.

Дифференциальное уравнение (2.311) можно записать и несколько по-иному:

$$\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{c}(t) + \frac{\psi_{\bullet}(t)}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\psi_{\bullet}(t)}{2}\cdot{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{n}(t) + \frac{\boldsymbol{\psi}(t)\circ{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t) - {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)\circ\boldsymbol{\psi}(t)}{4}, \tag{2.312}$$

а также покомпонентно:

$$\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}}{dt} = \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}\omega_0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_3 \end{bmatrix} + \frac{\psi_{\bullet}}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\psi_{\bullet}}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 - {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 - {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 - {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_3 \end{bmatrix} + \frac{\psi_{\bullet}}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ e_2\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_3 - e_3\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \\ e_3\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_1 - e_1\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_3 \\ e_1\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_2 - e_2\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \end{bmatrix}, \tag{2.313}$$

где e_1, e_2, e_3 определяются формулой (2.305), а коэффициент ${}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}$ следующим образом:

$${}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes} = e_1\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_1 + e_2\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_2 + e_3\cdot{}_{\mathbf{Y}}\omega_3. \tag{2.314}$$

В качестве $\psi_{\bullet}$ можно принять $\langle\boldsymbol{\psi}\rangle$, вычисляемое в соответствии с формулой (2.283).

В формулах (2.313) и (2.314) функциональная зависимость величин от времени t для краткости письма не указана.

Формула (2.313) может быть представлена в векторно-матричной записи с использованием следующих легко проверяемых зависимостей:

$$\begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}\omega_0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 & e_1\cdot e_3 \\ 0 & e_2\cdot e_1 & e_2\cdot e_2 & e_2\cdot e_3 \\ 0 & e_3\cdot e_1 & e_3\cdot e_2 & e_3\cdot e_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}\omega_0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\cdot{}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}; \tag{2.315}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 - {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 - {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 - {}_{\mathbf{Y}}\omega_{\otimes}\cdot e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-e_1^2 & -e_1\cdot e_2 & -e_1\cdot e_3 \\ 0 & -e_2\cdot e_1 & 1-e_2^2 & -e_2\cdot e_3 \\ 0 & -e_3\cdot e_1 & -e_3\cdot e_2 & 1-e_3^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}\omega_0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\cdot{}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}; \tag{2.316}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 - e_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \\ e_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 - e_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 \\ e_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 - e_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_3 & e_2 \\ 0 & e_3 & 0 & -e_1 \\ 0 & -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}\omega_0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}. \tag{2.317}$$

Эта векторно-матричная запись имеет вид:

$$\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}}{dt} = \mathbf{A} \cdot {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega} + \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \mathbf{B} \cdot {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega} + \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \mathbf{C} \cdot {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}. \tag{2.318}$$

Подобно тому, как было сделано в разделе 1.4.3, введем в рассмотрение квадратную матрицу **S**, являющуюся функцией единичного вектора **e**. Ниже представлена сама матрица **S** и ее степени с нулевой по пятую включительно. **I** – единичная матрица.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_3 & e_2 \\ 0 & e_3 & 0 & -e_1 \\ 0 & -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1^2 - 1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ 0 & e_2 \cdot e_1 & e_2^2 - 1 & e_2 \cdot e_3 \\ 0 & e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3^2 - 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{c} \mathbf{S}^3 = -\mathbf{S}; \\ \mathbf{S}^4 = -\mathbf{S}^2; \\ \mathbf{S}^5 = \mathbf{S}; \\ \mathbf{S}^0 = \mathbf{I}. \end{array} \tag{2.319}$$

Сравнивая формулы (2.315)–(2.317) с формулой (2.319), замечаем следующее:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^0 + \mathbf{S}^2; \quad \mathbf{B} = -\mathbf{S}^2; \quad \mathbf{C} = \mathbf{S}^1. \tag{2.320}$$

С учетом этих зависимостей вместо формулы (2.318) можем записать:

$$\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}}{dt} = \left[\mathbf{S}^0 + \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \mathbf{S}^1 + \left(1 - \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2}\right) \cdot \mathbf{S}^2 \right] \cdot {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}. \tag{2.321}$$

Может понадобиться и обратная зависимость, имеющая вид:

$${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega} = \left[\mathbf{S}^0 - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \mathbf{S}^1 + \left(1 - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\right) \cdot \mathbf{S}^2 \right] \cdot \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\boldsymbol{\psi}}{dt}. \tag{2.322}$$

Для демонстрации возможностей матрицы **S**(**e**) проверим правильность матричной формулы (2.322) с ее помощью. Поскольку эта зависимость обратна зависимости (2.321), матрицы этих зависимостей (в квадратных скобках) должны быть взаимно обратными, то есть их произведение должно быть равно единичной матрице:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \left[\mathbf{S}^0 + \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \mathbf{S}^1 + \left(1 - \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2}\right) \cdot \mathbf{S}^2 \right] \cdot \left[\mathbf{S}^0 - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \mathbf{S}^1 + \left(1 - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\right) \cdot \mathbf{S}^2 \right] = \\ &= \mathbf{S}^0 + \left(\frac{\psi_\bullet}{2} - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi_\bullet}{2} \right) \cdot \mathbf{S}^1 + \left(1 - \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2} + 1 - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet} - \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi_\bullet}{2} \right) \cdot \mathbf{S}^2 + \\ &+ \left[\frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\right) + \left(1 - \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2}\right) \cdot \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet} \cdot \operatorname{tg}\frac{\psi_\bullet}{2} \right] \cdot \mathbf{S}^3 + \left(1 - \frac{\psi_\bullet}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2}\right) \left(1 - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\right) \cdot \mathbf{S}^4. \end{aligned} \tag{2.323}$$

Учитывая то, что $\mathbf{S}^3 = -\mathbf{S}^1$, а $\mathbf{S}^4 = -\mathbf{S}^2$, выражение (2.323) можно переписать так:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^0 + \left[\frac{\psi_\bullet}{2} - \frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_\bullet}{2} - \frac{\psi_\bullet}{2}\cdot\left(1-\frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\right) + \left(1-\frac{\psi_\bullet}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2}\right)\cdot\frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_\bullet}{2}\right]\cdot\mathbf{S}^1 +$$
$$+\left[1-\frac{\psi_\bullet}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2} + 1-\frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet} - \frac{\psi_\bullet}{2}\cdot\frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\cdot\mathrm{tg}\frac{\psi_\bullet}{2} - \left(1-\frac{\psi_\bullet}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\psi_\bullet}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{\sin\psi_\bullet}{\psi_\bullet}\right)\right]\cdot\mathbf{S}^2. \quad (2.324)$$

Немного потрудившись, читатель может убедиться в том, что числовые коэффициенты при матрицах $\mathbf{S}^1$ и $\mathbf{S}^2$ равны нулю. Таким образом, матрица $\mathbf{P} = \mathbf{S}^0 = \mathbf{I}$ – единичная матрица, что и требовалось доказать.

Для целей решения задачи о кинематике твердого тела с одной неподвижной точкой достаточно было ограничиться чисто векторными кватернионами $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\omega}$, полагая, что скалярные части этих кватернионов ψ_0 и ω_0, не имеющие кинематического смысла, можно принять равными нулю. Мы же поступили иначе. Величины ψ_0 и ω_0 полагались не обязательно нулевыми, и они присутствовали во всех преобразованиях.

Решая задачи о кинематике твердого тела, величины ψ_0 и ω_0 надо принять равными нулю. Однако, как будет показано ниже, существуют объекты более сложные, чем твердое тело, описываемые кватернионами $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\omega}$ общего вида. Полученные здесь кинематические формулы будут справедливы и для этих объектов.

2.10.3. Сложное вращение

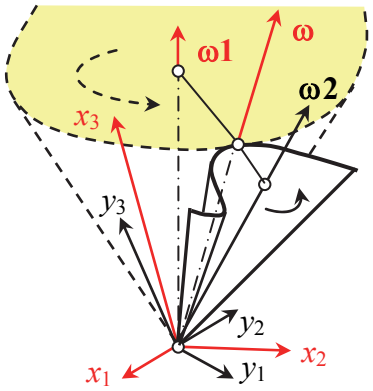


Рис. 2.14. Сложное вращение

Следуя работе [60], рассмотрим сложное вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. Пусть заданы три системы координат: $\mathbf{X}$ – неподвижная, $\mathbf{Z}(t)$ – подвижная промежуточная, $\mathbf{Y}(t)$ – подвижная, связанная с телом. Движение тела определяется тем, что промежуточная система координат $\mathbf{Z}(t)$ вращается относительно неподвижной системы координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}(t)$, а тело, связанное с системой координат $\mathbf{Y}(t)$, вращается относительно промежуточной системы координат $\mathbf{Z}(t)$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}(t)$ (рис. 2.14). Движение промежуточной системы $\mathbf{Z}(t)$ относительно неподвижной системы $\mathbf{X}$ называется *переносным*, движение тела, связанного с системой $\mathbf{Y}(t)$, относительно промежуточной системы $\mathbf{Z}(t)$ называется *относительным* и движение тела, связанного с системой $\mathbf{Y}(t)$, относительно неподвижной системы $\mathbf{X}$ называется *абсолютным*. Требуется найти половинный экспоненциальный кватернион абсолютного движения $\boldsymbol{\lambda}(t)$ как функцию времени t.

Из раздела 2.10.1 следует, что половинные экспоненциальные кватернионы переносного $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(t)$ и относительного $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}(t)$ движений можно найти из дифференциальных уравнений:

$$_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}'(t) = \frac{_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}(t)}{2}\circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(t); \quad {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}'(t) = {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}(t)\circ\frac{_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}(t)}{2}, \quad (2.325)$$

а половинный экспоненциальный кватернион абсолютного движения – по формуле:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(t) \circ {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}(t) . \tag{2.326} $$

Эта формула может быть использована для получения искомой функции $\boldsymbol{\lambda}(t)$, если удастся проинтегрировать дифференциальные уравнения (2.325).

Можно избежать интегрирования двух дифференциальных уравнений (2.325), заменив эту процедуру интегрированием одного дифференциального уравнения, записанного для функции $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Для вывода этого уравнения продифференцируем равенство (2.326):

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}'(t) \circ {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}(t) + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(t) \circ {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}'(t) . \tag{2.327} $$

Подставляя сюда выражения из формулы (2.325) с использованием (2.326), получим:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}(t) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) \circ {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}(t)}{2} . \tag{2.328} $$

Это линейное дифференциальное уравнение позволяет найти половинный экспоненциальный кватернион абсолютного движения ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t)$ на основании скорости переносного вращения ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}(t)$, представленной в неподвижной системе координат $\mathbf{X}$, и скорости относительного вращения ${}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}(t)$, представленной в системе координат $\mathbf{Y}(t)$, связанной с подвижным телом.

Если скорость переносного и скорость относительного вращения представлены в одной и той же системе координат, эти скорости поэлементно складываются:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}(t) + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}(t) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}(t); \quad {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}(t) + {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t) . \tag{2.329} $$

Тогда будут справедливы следующие дифференциальные уравнения:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}(t)}{2} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t); \quad {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)}{2} . \tag{2.330} $$

Они имеют вид, подобный уравнениям (2.325).

При сложном вращении твердое тело в каждый момент времени вращается вокруг мгновенной оси вращения, определяемой векторной частью кватерниона $\boldsymbol{\omega}$. В неподвижной системе координат $\mathbf{X}$ эта ось прочерчивает коническую поверхность, называемую неподвижным аксоидом. На рис. 2.14 он изображен пунктиром. В подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$ она прочерчивает коническую поверхность, называемую подвижным аксоидом. На рис. 2.14 он показан сплошной линией. Тело вращается так, что подвижный аксоид катится по неподвижному без проскальзывания.

2.10.4. Замкнутые решения задачи Дарбу

Кинематическая задача, описанная в разделах 2.10.1 и 2.10.2 и состоящая в определении ориентации твердого тела с неподвижной точкой по известной его угловой скорости, в механике носит название задачи Дарбу. Кватернион ориентации твердого тела связан со скоростью его вращения классической дифференциальной зависимостью (2.294). Если принять, что ориентация твердого тела определяется половинным экспоненциальным кватернионом ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t)$, а угловая скорость кватернионом ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}(t)$

в неподвижной системе координат **X**, то задача Дарбу описывается дифференциальным уравнением:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}(t)}{2} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) . \tag{2.331} $$

Если же его угловая скорость представлена кватернионом ${}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)$ в системе координат $\mathbf{Y}(t)$, связанной с твердым телом, то задачу Дарбу можно описать кватернионным дифференциальным уравнением (2.296):

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)}{2} . \tag{2.332} $$

Замкнутое решение этих уравнений (в виде формулы) при произвольной функциональной зависимости $\boldsymbol{\omega}(t)$ неизвестно. Специалисты считают [9], что замкнутые решения существуют для кватернионов $\boldsymbol{\omega}(t)$ при постоянном по времени направлении его векторной части и переменной по времени ее величине и для кватернионов $\boldsymbol{\omega}(t)$ с постоянной по времени величиной векторной части и переменным по времени ее направлением. Хорошо известны два частных случая решения задачи Дарбу в замкнутом виде: случай вращения с постоянной угловой скоростью и случай регулярной конической прецессии.

Случай вращения с постоянной угловой скоростью. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки так, что кватернион угловой скорости ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной системе координат **X** постоянен во времени как по величине, так и по направлению векторной части. В этом случае общее решение дифференциального уравнения (2.331) имеет вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) = \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} \cdot t}{2} \circ \boldsymbol{\lambda 0} , \tag{2.333} $$

где $\boldsymbol{\lambda 0}$ – кватернионная константа, определяемая из граничных условий. Из формулы видно, что $\boldsymbol{\lambda 0}$ – значение искомой функции при $t = 0$.

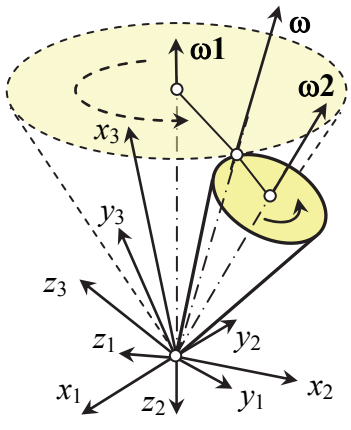


Рис. 2.15. Случай регулярной конической прецессии

Если твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ${}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси $\mathbf{Y}(t)$, связанной с твердым телом, общее решение дифференциального уравнения (2.332) имеет вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda 0} \circ \exp \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega} \cdot t}{2} . \tag{2.334} $$

В правильности этих решений можно убедиться непосредственной подстановкой в дифференциальные уравнения. При этом следует учитывать, что кватернион $\boldsymbol{\omega}$ и его половинная экспонента коллинеарны, а значит, перестановочны при кватернионном умножении.

Случай регулярной конической прецессии. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки так, что переменный во времени кватернион мгновенной

угловой скорости вращения этого тела $\boldsymbol{\omega}(t)$ имеет постоянный во времени модуль, а его векторная часть описывает коническую поверхность, равномерно вращаясь вокруг оси этой поверхности (рис. 2.15). Регулярная коническая прецессия является частным случаем сложного вращения твердого тела (см. раздел 2.10.3), когда переносное движение имеет постоянную скорость вращения $_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}$ в системе координат $\mathbf{X}$, а относительное движение имеет постоянную скорость вращения $_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}$ в системе координат $\mathbf{Y}(t)$, связанной с телом. Тогда дифференциальное уравнение сложного вращения (2.328) приобретает такой вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) \circ {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}}{2}, \tag{2.335} $$

а его общее решение выражается замкнутой формулой:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) = \exp\frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} \cdot t}{2} \circ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0} \circ \exp\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2} \cdot t}{2}, \tag{2.336} $$

где $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}$ – произвольная кватернионная константа, равная значению искомого кватерниона $_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t)$ при $t = 0$. Эта константа определяет начальное положение твердого тела и взаимное расположение осей $_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}$ и $_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}$.

Таким образом, абсолютное вращение твердого тела в случае регулярной конической прецессии происходит вокруг мгновенной оси вращения, определяемой векторной частью кватерниона $\boldsymbol{\omega}$, с постоянной по величине угловой скоростью $\omega_{\bullet}$. Мгновенная ось вращения в неподвижной системе координат $\mathbf{X}$ перемещается вокруг векторной части кватерниона $\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}$ с постоянной угловой скоростью $\omega 1_{\bullet,}$, описывая боковую поверхность прямого кругового конуса, являющегося неподвижным аксоидом. Эта же ось в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$ перемещается вокруг векторной части кватерниона $\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}$ с постоянной угловой скоростью $\omega 2_{\bullet,}$, описывая боковую поверхность прямого кругового конуса, являющегося подвижным аксоидом. Вращение тела происходит так, что подвижный аксоид, соединенный с телом, перекатывается по неподвижному без проскальзывания. В промежуточной системе координат $\mathbf{Z}(t)$ (см. раздел 2.10.3) эта ось неподвижна, а кватернион $\boldsymbol{\omega}$ постоянен по величине и направлению, являясь суммой кватернионов $\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}$:

$$ {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega} = {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} + {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}. \tag{2.337} $$

Можно выписать формулы для кватерниона $_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t)$, определяющего вращение твердого тела в случае регулярной конической прецессии, считая известными любые две угловые скорости из набора $_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}$, $_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}$ и $_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}$.

Рассмотрим случай, когда заданы $_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}$ и $_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}$ и при этом скорость абсолютного вращения в неподвижной системе координат выражается формулой:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}(t) = \exp\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} \cdot t}{2} \circ \left({}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} + {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2} \right) \circ \exp\left(-\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} \cdot t}{2} \right). \tag{2.338} $$

В этом случае общее решение дифференциального уравнения (2.333) таково:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) = \exp\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}\cdot t}{2} \circ \exp\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}\cdot t}{2} \circ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}\,. \qquad (2.339) $$

Если заданы ${}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}$ и ${}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}$ и скорость абсолютного вращения в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$ выражается формулой:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}(t) = \exp\left(-\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}\cdot t}{2}\right) \circ \left({}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} + {}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}\right) \circ \exp\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}\cdot t}{2}\,, \qquad (2.340) $$

общее решение дифференциального уравнения (2.334) будет таким:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0} \circ \exp\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}\cdot t}{2} \circ \exp\frac{{}_{\mathbf{Z}(t)}\boldsymbol{\omega}\mathbf{2}\cdot t}{2}\,. \qquad (2.341) $$

Во всех случаях $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}$ – произвольная кватернионная константа, равная значению искомого кватерниона ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t)$ при t = 0. Правильность формул (2.338) – (2.341) проверяется подстановкой в уравнения (2.331) и (2.332).

2.11. Интерполяция кватернионов

Во многих практических случаях возникает одномерная задача интерполяции кватернионов, то есть задача о восстановлении непрерывной кватернионной функции скалярного аргумента на отрезке по ее значениям на концах этого отрезка.

2.11.1. Простая линейная интерполяция кватернионов

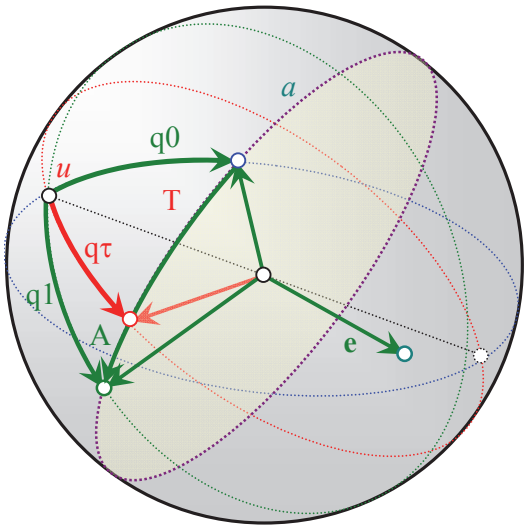


Рис. 2.16. Простая линейная интерполяция

Рассмотрим задачу о построении непрерывной функции кватерниона общего вида $\mathbf{q}(\tau)$ от действительного параметра τ по ее дискретным значениям. Пусть на концах отрезка $[0 \le \tau \le 1]$ эта функция принимает значения:

$$ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q0};\quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{q1}\,, \qquad (2.342) $$

где $\mathbf{q0}$ и $\mathbf{q1}$ – заданные кватернионы. Требуется определить функцию $\mathbf{q}(\tau)$ для внутренних точек этого отрезка.

Наиболее естественным методом решения этой задачи является метод простой линейной интерполяции:

$$ \mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q0}\cdot(1-\tau) + \mathbf{q1}\cdot\tau\,, \qquad (2.343) $$

где безразмерный параметр τ пробегает значения от 0 до 1.

Для понимания дальнейшего воспользуемся представлением верзоров рассматриваемых кватернионов на единичной сфере (рис. 2.16) свободноперемещаемыми дугами больших окружностей. Дуги верзоров кватернионов $\mathbf{q0}$ и $\mathbf{q1}$ надо совместить своими началами в точке *u*, как показано на рисунке. Через концы этих дуг нужно провести

большую окружность *a*. По данным раздела 2.7 начало дуги, представляющей верзор кватерниона **q**(τ), будет находиться в точке *u* , а конец дуги – на большой окружности *a*. Для определения большой окружности *a* рассмотрим кватернион:

$$\mathbf{A} = \mathbf{q1} \circ \mathbf{q0}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{q0}|^2} \cdot \begin{bmatrix} q0_0 \cdot q1_0 + q0_1 \cdot q1_1 + q0_2 \cdot q1_2 + q0_3 \cdot q1_3 \\ q0_0 \cdot q1_1 - q0_1 \cdot q1_0 + q0_2 \cdot q1_3 - q0_3 \cdot q1_2 \\ q0_0 \cdot q1_2 - q0_1 \cdot q1_3 - q0_2 \cdot q1_0 + q0_3 \cdot q1_1 \\ q0_0 \cdot q1_3 + q0_1 \cdot q1_2 - q0_2 \cdot q1_1 - q0_3 \cdot q1_0 \end{bmatrix}. \tag{2.344}$$

Модуль этого кватерниона выражается формулой

$$|\mathbf{A}| = \frac{|\mathbf{q1}|}{|\mathbf{q0}|}, \tag{2.345}$$

а верзор – формулами

$$\mathbf{a} = \frac{1}{|\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q1}|} \cdot \begin{bmatrix} q0_0 \cdot q1_0 + q0_1 \cdot q1_1 + q0_2 \cdot q1_2 + q0_3 \cdot q1_3 \\ q0_0 \cdot q1_1 - q0_1 \cdot q1_0 + q0_2 \cdot q1_3 - q0_3 \cdot q1_2 \\ q0_0 \cdot q1_2 - q0_1 \cdot q1_3 - q0_2 \cdot q1_0 + q0_3 \cdot q1_1 \\ q0_0 \cdot q1_3 + q0_1 \cdot q1_2 - q0_2 \cdot q1_1 - q0_3 \cdot q1_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ e_1 \cdot \sin\theta \\ e_2 \cdot \sin\theta \\ e_3 \cdot \sin\theta \end{bmatrix}. \tag{2.346}$$

Как следует из раздела 2.7, этот верзор определяет большую окружность, плоскость которой перпендикулярна единичному вектору **e**, и дугу A на этой окружности, имеющую длину θ и соединяющую концы дуг, которыми изображаются верзоры кватернионов **q0** и **q1**.

Длина дуги определяется по формуле

$$\theta = \arccos \frac{q0_0 \cdot q1_0 + q0_1 \cdot q1_1 + q0_2 \cdot q1_2 + q0_3 \cdot q1_3}{|\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q1}|}, \tag{2.347}$$

а единичный вектор – по формуле

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q1}| \cdot \sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} q0_0 \cdot q1_1 - q0_1 \cdot q1_0 + q0_2 \cdot q1_3 - q0_3 \cdot q1_2 \\ q0_0 \cdot q1_2 - q0_1 \cdot q1_3 - q0_2 \cdot q1_0 + q0_3 \cdot q1_1 \\ q0_0 \cdot q1_3 + q0_1 \cdot q1_2 - q0_2 \cdot q1_1 - q0_3 \cdot q1_0 \end{bmatrix}. \tag{2.348}$$

Рассмотрим теперь дугу *T*, которая соединяет конец дуги q0 и конец дуги qτ и представляет верзор интерполяционного кватерниона (2.343). По образу и подобию формулы (2.347) запишем формулу для длины этой дуги:

$$\theta(\tau) = \arccos \frac{q0_0 \cdot q(\tau)_0 + q0_1 \cdot q(\tau)_1 + q0_2 \cdot q(\tau)_2 + q0_3 \cdot q(\tau)_3}{|\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q}(\tau)|}. \tag{2.349}$$

Модуль интерполяционного кватерниона **q**(τ), фигурирующий здесь, может быть вычислен по формуле:

$$|\mathbf{q}(\tau)| = \sqrt{|\mathbf{q0}|^2 \cdot (1-\tau)^2 + 2 \cdot |\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q1}| \cdot (1-\tau) \cdot \tau \cdot \cos\theta + |\mathbf{q1}|^2 \cdot \tau^2}\ . \tag{2.350}$$

С учетом формулы (2.347), из которой вытекает:

$$q0_0 \cdot q1_0 + q0_1 \cdot q1_1 + q0_2 \cdot q1_2 + q0_3 \cdot q1_3 = |\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q1}| \cdot \cos\theta\,, \tag{2.351}$$

можем записать:

$$\theta(\tau) = \arccos \frac{|\mathbf{q0}| \cdot (1-\tau) + |\mathbf{q1}| \cdot \tau \cdot \cos\theta}{|\mathbf{q}(\tau)|}\,. \tag{2.352}$$

В случае простой линейной интерполяции скорость изменения угла $\theta(\tau)$ по параметру τ переменна. Формула для определения этой скорости такова:

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \frac{|\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q1}| \cdot \sin\theta}{|\mathbf{q}(\tau)|^2}\,. \tag{2.353}$$

Рассмотрим численный пример с кватернионами **q0** = [0, 1, 2, 3] и **q1** = [– 2, 1, 1, 1]. Модули этих кватернионов равны соответственно:

$$|\mathbf{q0}| = \sqrt{14} = 3,742; \quad |\mathbf{q1}| = \sqrt{7} = 2,646\,. \tag{2.354}$$

Угол θ дуги большой окружности *a*, соединяющей концы дуг, которыми изображаются верзоры кватернионов **q0** и **q1**, вычисляемый по формуле (2.347):

$$\theta = \arccos \frac{0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{3,742 \cdot 2,646} = 0,920\,. \tag{2.355}$$

Единичный вектор, перпендикулярный плоскости большой окружности *a*, вычисляемый по формуле (2.348):

$$\mathbf{e} = [0,127;\ 0,762;\ 0,635]^T\,. \tag{2.356}$$

Далее перейдем к интерполяционному кватерниону, вычисляемому по формуле (2.343):

$$\mathbf{q}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \cdot (1-\tau) - 2 \cdot \tau \\ 1 \cdot (1-\tau) + 1 \cdot \tau \\ 2 \cdot (1-\tau) + 1 \cdot \tau \\ 3 \cdot (1-\tau) + 1 \cdot \tau \end{bmatrix}. \tag{2.357}$$

Его модуль, вычисляемый по формуле (2.350), также представляет собой функцию τ:

$$|\mathbf{q}(\tau)| = \sqrt{14 \cdot (1-\tau)^2 + 12 \cdot (1-\tau) \cdot \tau + 7 \cdot \tau^2}\ . \tag{2.358}$$

Длина дуги *T*, отсекаемой дугой интерполирующего кватерниона (см. рис. 2.16), является функцией параметра τ следующего вида:

$$\theta(\tau) = \arccos \frac{3,742 \cdot (1-\tau) + 2,646 \cdot \tau \cdot \cos 0,920}{\sqrt{14 \cdot (1-\tau)^2 + 12 \cdot (1-\tau) \cdot \tau + 7 \cdot \tau^2}}. \qquad (2.359)$$

Скорость изменения длины этой дуги по параметру τ выражается формулой:

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \frac{3,742 \cdot 2,646 \cdot \sin 0,920}{14 \cdot (1-\tau)^2 + 12 \cdot (1-\tau) \cdot \tau + 7 \cdot \tau^2}. \qquad (2.360)$$

На рис. 2.17 приведено графическое представление простой линейной интерполяции кватернионов. На графиках, где на оси абсцисс отложены значения безразмерного параметра τ, показана закономерность изменения компонентов интерполяционного кватерниона **q**(τ), его модуля |**q**(τ)|, длины дуги θ(τ) и скорости ее изменения по τ.

Как видно из графиков, компоненты интерполяционного кватерниона изменяются по линейному закону, а остальные переменные – по нелинейным законам.

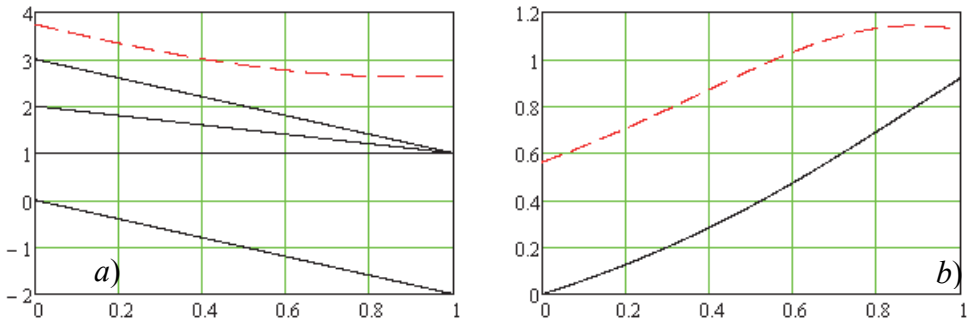


Рис. 2.17. Графическое представление для простой линейной интерполяции *a*) компонентов интерполяционного кватерниона **q**(τ) (2.357) и его модуля |**q**(τ)| (2.358) (пунктир); *b*) длины дуги *T* (2.359) и скорости ее изменения по τ (2.360) (пунктир). Соответствие компонентов кватерниона и графиков на рис. *a*) устанавливается по граничным значениям

Прикладное значение интерполяционных формул заключается в возможности восстановления непрерывной ориентации твердого тела по ее дискретным значениям. Так если кватернион **q0** определяет ориентацию тела в момент времени $t = t0$, а кватернион **q1** – в момент времени $t = t1$, то ориентацию тела в промежуточный момент времени можно считать (приближенно) равной **q**(τ), где

$$\tau = \frac{t - t0}{t1 - t0}. \qquad (2.361)$$

Положительным свойством простой линейной интерполяции является то, что перевод твердого тела из положения **q0** в положение **q1** происходит путем его вращения вокруг одного и того же единичного вектора **e** (2.348) на угол θ, то есть, по кратчайшему угловому расстоянию, а отрицательным свойством то, что скорость этого вращения непостоянна.

2.11.2. Сферическая линейная интерполяция кватернионов

Как и в предыдущем разделе, будем разыскивать непрерывную функцию кватерниона общего вида $\mathbf{q}(\tau)$ от действительного параметра τ по ее значениям на концах отрезка изменения параметра $[0 \le \tau \le 1]$:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q0}; \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{q1}. \tag{2.362}$$

Будем рассматривать интерполяцию кватернионов в терминах ориентации твердого тела в пространстве. Роль времени при этом будет играть безразмерный параметр τ. Пусть в начальный момент при $\tau = 0$ тело имело ориентацию, определяемую половинным экспоненциальным кватернионом **q0**, а в конечный момент при $\tau = 1$ – ориентацию, определяемую половинным экспоненциальным кватернионом **q1**. Требуется определить половинный экспоненциальный кватернион $\mathbf{q}(\tau)$, определяющий ориентацию рассматриваемого тела в промежуточный момент τ при условии, что кватернион скорости вращения тела $\boldsymbol{\omega}$ во временном интервале [0, 1] является константой. Такая интерполяция в литературе называется сферической линейной интерполяцией [43].

В разделе 2.10.4 приводится общее решение кинематического уравнения для половинного экспоненциального кватерниона, определяющего ориентацию твердого тела при постоянном кватернионе угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной системе координат (2.333). Это решение в принятых здесь обозначениях имеет вид:

$$\mathbf{q}(t) = \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\tau}{2}\circ\mathbf{Q}, \tag{2.363}$$

где Q – произвольный постоянный кватернион.

Для рассматриваемой задачи должны соблюдаться следующие равенства:

$$\mathbf{q0} = \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot 0}{2}\circ\mathbf{Q}; \quad \mathbf{q1} = \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot 1}{2}\circ\mathbf{Q}, \tag{2.364}$$

из которых можно вычислить кватернионы **Q** и $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q0}; \quad \exp\frac{\boldsymbol{\omega}}{2} = \boldsymbol{\Delta q}; \quad \boldsymbol{\omega} = 2\cdot\mathrm{Ln}\,\boldsymbol{\Delta q}, \tag{2.365}$$

где

$$\boldsymbol{\Delta q} = \mathbf{q1}\circ\mathbf{q0}^{-1}. \tag{2.366}$$

Подставляя в равенство (2.363) выражения для **Q** и $\boldsymbol{\omega}$, получим эквивалентные интерполяционные формулы:

$$\mathbf{q}(\tau) = \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\tau}{2}\circ\mathbf{q0}; \quad \mathbf{q}(\tau) = \boldsymbol{\Delta q}^{\tau}\circ\mathbf{q0}. \tag{2.367}$$

Формула (2.367) содержит степенную функцию от кватерниона. Воспользовавшись зависимостью, приведенной в формуле (9.13) из раздела 9.1, можем записать:

$$\Delta\mathbf{q}^{\tau} = |\Delta\mathbf{q}|^{\tau} \cdot [\cos(\tau\cdot\theta);\quad e_1\cdot\sin(\tau\cdot\theta);\quad e_2\cdot\sin(\tau\cdot\theta);\quad e_3\cdot\sin(\tau\cdot\theta)], \tag{2.368}$$

где

$$\theta = \operatorname{Arg}\Delta\mathbf{q} = \arg\Delta\mathbf{q} + 2\cdot\pi\cdot n;\quad e_i = \frac{\Delta q_i}{|\Delta\mathbf{q}|\cdot\sin\theta}\quad i = 1, 2, 3, \tag{2.369}$$

n – произвольное целое число.

Как видно из этих формул, функция $\Delta\mathbf{q}^{\tau}$ – многозначная. Задавая различные значения n, будем получать различные виды интерполяций. При n = 0 получим обычную сферическую линейную интерполяцию, когда тело перемещается из положения **q0** в положение **q1** по кратчайшему угловому расстоянию (рис. 2.18 *a*). При n = – 1 получим интерполяцию, когда тело перемещается из положения **q0** в положение **q1**, вращаясь вокруг той же оси в противоположном направлении (рис. 2.18 *b*). При n = 1 тело, перемещаясь в сторону кратчайшего расстояния, выполняет один дополнительный полный оборот. Не составит труда истолковать физический смысл интерполяций и при других значениях n.

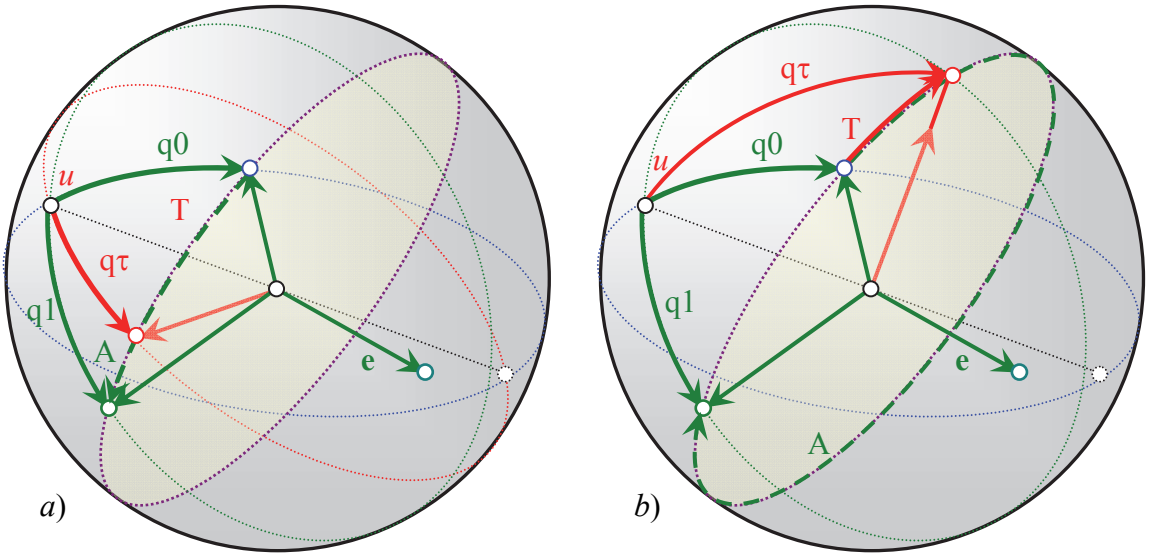


Рис. 2.18. Сферическая линейная интерполяция: *a*) для n = 0; *b*) для n = – 1

Важным качеством интерполяционной формулы является ее независимость от направления интерполяции. Для формальной проверки этого качества в исследуемой интерполяционной формуле надо заменить **q0** на **q1**, **q1** на **q0** и τ на 1 – τ и в результате получить ту же формулу.

Выполним проверку второй формулы (2.367). После подстановки в эту формулу выражения (2.366) и оговоренной выше замены получим:

$$\mathbf{q}(\tau) = (\mathbf{q0}\circ\mathbf{q1}^{-1})^{1-\tau}\circ\mathbf{q1} = (\mathbf{q0}\circ\mathbf{q1}^{-1})^{-\tau}\circ\mathbf{q0}\circ\mathbf{q1}^{-1}\circ\mathbf{q1} = (\mathbf{q1}\circ\mathbf{q0}^{-1})^{\tau}\circ\mathbf{q0} = \Delta\mathbf{q}^{\tau}\circ\mathbf{q0}. \tag{2.370}$$

Таким образом, мы пришли к формуле (2.367), что свидетельствует о независимости рассматриваемой интерполяционной формулы от направления интерполирования.

В качестве примера на последующих рисунках показаны графики изменения компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$, являющегося результатом интерполяции между кватернионами $\mathbf{q0}$ = [0, 1, 2, 3] и $\mathbf{q1}$ = [– 2, 1, 1, 1], длины дуги T и скорости ее изменения по τ при n = – 1, n = 0 и n = 1. Переменной τ отведена ось абсцисс. Соответствие кривых и компонент кватерниона можно установить по ординатам кривых на краях интервала.

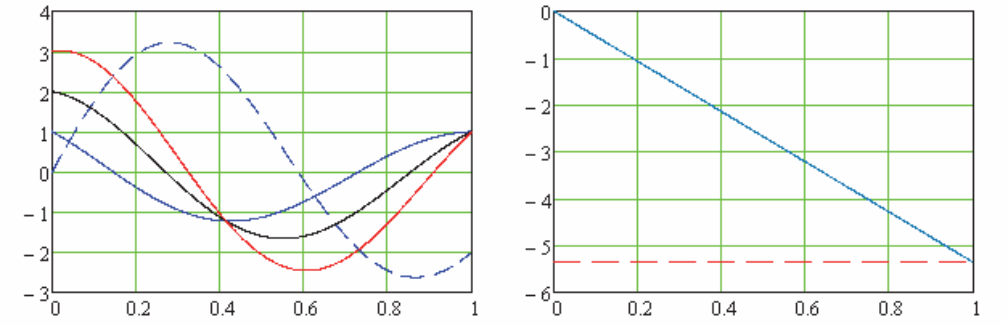


Рис. 2.19. Графики для n = – 1: слева – изменения компонент кватерниона $\mathbf{q}(\tau)$; справа – длины дуги T (сплошная) и скорости ее изменения по τ (пунктир)

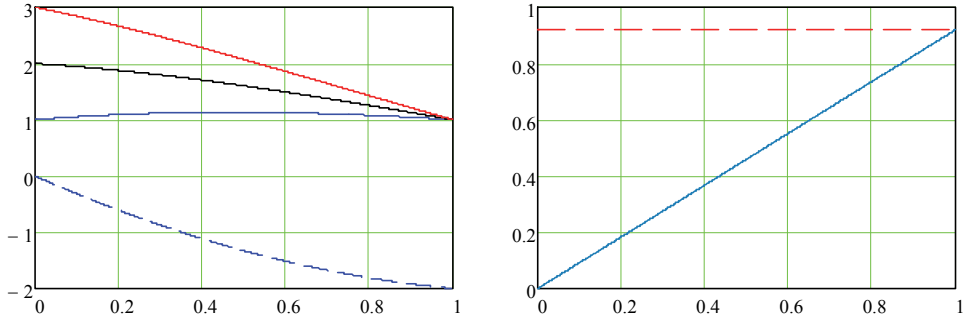


Рис. 2.20. Графики для n = 0: слева – изменения компонент кватерниона $\mathbf{q}(\tau)$; справа – длины дуги T (сплошная) и скорости ее изменения по τ (пунктир)

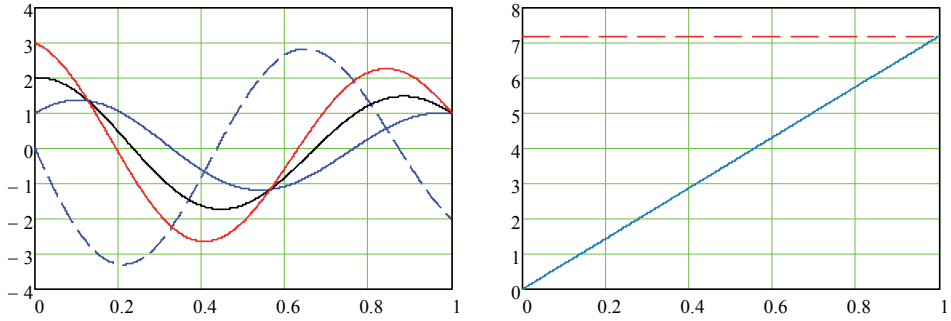


Рис. 2.21. Графики для n = 1: слева – изменения компонент кватерниона $\mathbf{q}(\tau)$; справа – длины дуги T (сплошная) и скорости ее изменения по τ (пунктир)

Значение $\mathbf{q}(\tau)$, определяемое интерполяционной формулой (2.367), может быть представлено и в виде линейной комбинации кватернионов $\mathbf{q0}$ и $\mathbf{q1}$:

$$\mathbf{q}(\tau) = x0 \cdot \mathbf{q0} + x1 \cdot \mathbf{q1}\,, \qquad (2.371)$$

где $x0$ и $x1$ – пока не определенные числовые коэффициенты.
Пользуясь формулой (2.367), можем записать:

$$\Delta\mathbf{q}^{\tau} \circ \mathbf{q0} = x0 \cdot \mathbf{q0} + x1 \cdot \mathbf{q1}. \tag{2.372}$$

Умножая это равенство справа на $\mathbf{q0}^{-1}$ и используя формулу (2.366), получим:

$$\Delta\mathbf{q}^{\tau} = x0 \cdot \mathbf{i} + x1 \cdot \Delta\mathbf{q}, \tag{2.373}$$

где $\mathbf{i}$ – тождественный кватернион.

Пользуясь обозначениями формул (2.368) и (2.369), формулу (2.373) в развернутом виде можно представить так:

$$\frac{|\mathbf{q1}|^{\tau}}{|\mathbf{q0}|^{\tau}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta \cdot \tau) \\ k_1 \cdot \sin(\theta \cdot \tau) \\ k_2 \cdot \sin(\theta \cdot \tau) \\ k_3 \cdot \sin(\theta \cdot \tau) \end{bmatrix} = x0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x1 \cdot \frac{|\mathbf{q1}|}{|\mathbf{q0}|} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ k_1 \cdot \sin\theta \\ k_2 \cdot \sin\theta \\ k_3 \cdot \sin\theta \end{bmatrix}. \tag{2.374}$$

По существу здесь записана система из четырех уравнений. Однако они не являются независимыми. Три последних – линейно зависимы, и вместо четырех уравнений в этой системе достаточно оставить два:

$$\frac{|\mathbf{q1}|^{\tau}}{|\mathbf{q0}|^{\tau}} \cdot \cos(\theta \cdot \tau) = x0 + x1 \cdot \frac{|\mathbf{q1}|}{|\mathbf{q0}|} \cdot \cos\theta; \quad \frac{|\mathbf{q1}|^{\tau}}{|\mathbf{q0}|^{\tau}} \cdot \sin(\theta \cdot \tau) = x1 \cdot \frac{|\mathbf{q1}|}{|\mathbf{q0}|} \cdot \sin\theta. \tag{2.375}$$

Разрешая эту систему уравнений относительно $x0$ и $x1$, получим:

$$x0 = \frac{|\mathbf{q1}|^{\tau}}{|\mathbf{q0}|^{\tau}} \cdot \frac{\sin[\theta \cdot (1-\tau)]}{\sin\theta}; \quad x1 = \frac{|\mathbf{q0}|^{1-\tau}}{|\mathbf{q1}|^{1-\tau}} \cdot \frac{\sin(\theta \cdot \tau)}{\sin\theta}, \tag{2.376}$$

что позволяет представить интерполяционную формулу (2.367) в другом виде:

$$\mathbf{q}(\tau) = \frac{|\mathbf{q1}|^{\tau}}{|\mathbf{q0}|^{\tau}} \cdot \frac{\sin[\theta \cdot (1-\tau)]}{\sin\theta} \cdot \mathbf{q0} + \frac{|\mathbf{q0}|^{1-\tau}}{|\mathbf{q1}|^{1-\tau}} \cdot \frac{\sin(\theta \cdot \tau)}{\sin\theta} \cdot \mathbf{q1}. \tag{2.377}$$

Развернутая формула для определения угла θ имеет вид:

$$\theta = \arccos \frac{q0_0 \cdot q1_0 + q0_1 \cdot q1_1 + q0_2 \cdot q1_2 + q0_3 \cdot q1_3}{|\mathbf{q0}| \cdot |\mathbf{q1}|} + 2 \cdot \pi \cdot n, \tag{2.378}$$

где n – произвольное целое число.

Формулы (2.377) и (2.378) полностью эквивалентны приведенным выше формулам (2.367), (2.368) и (2.369).

Сферическая линейная интерполяция более сложна по отношению к простой линейной интерполяции, поскольку использует трансцендентные функции. Однако этот тип интерполяции обеспечивает поворот твердого тела из одной фиксированной позиции в другую с постоянной угловой скоростью. Кроме того, этот поворот может быть осуществлен не только по кратчайшему угловому расстоянию, но и иными

способами. Например, он может выполняться в противоположном угловом направлении или с включением в интервал интерполирования одного или нескольких полных оборотов. Эти свойства важны для использования в компьютерной анимации, где широко применяются кватернионы для оцифровки ориентации съемочной камеры. Весьма распространенной является процедура SLERP(**q0**, **q1**, τ), которая возвращает интерполяционный кватернион $\mathbf{q}(\tau)$. Однако она требует, чтобы кватернионы **q0** и **q1** были нормированными. Повернуть камеру на угол, превышающий π, она не умеет.

2.11.3. Прецессионная интерполяция

Задача прецессионной интерполяции идеологически близка к задаче линейной сферической интерполяции. Как и там, разыскивается непрерывная функция кватерниона $\mathbf{q}(\tau)$ от числового параметра τ по ее значениям на концах отрезка изменения параметра $[0 \le \tau \le 1]$:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q0}; \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{q1}. \tag{2.379}$$

Для этого будем использовать дифференциальные уравнения (2.325), описывающие сложное движение твердого тела при регулярной конической прецессии. Интерполяционную функцию представим в следующем виде:

$$\mathbf{q}(\tau) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(\tau) \circ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(\tau), \tag{2.380}$$

где кватернионные функции $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(\tau)$ и $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(\tau)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2} \circ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(\tau); \quad \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}'(\tau) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(\tau) \circ \frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{1}}{2}. \tag{2.381}$$

Здесь введены в рассмотрение постоянные кватернионы **ω0** и **ω1**, которые в терминах сложного движения твердого тела представляют угловые скорости переносного и относительного вращения этого тела соответственно.

Как показано в разделе 2.10.4, общие решения дифференциальных уравнений (2.381) представимы в замкнутом виде:

$$\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(\tau) = \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} \cdot \tau}{2} \circ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(0); \quad \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(\tau) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(0) \circ \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} \cdot \tau}{2}, \tag{2.382}$$

где $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(0)$ и $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(0)$ – произвольные кватернионные константы, имеющие смысл значений соответствующих кватернионных функций при $\tau = 0$.

С учетом этого интерполяционную функцию (2.380) можно записать так:

$$\mathbf{q}(\tau) = \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} \cdot \tau}{2} \circ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(0) \circ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(0) \circ \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{1} \cdot \tau}{2}. \tag{2.383}$$

Из этой формулы видно, что функция $\mathbf{q}(\tau)$ полностью определяется четырьмя кватернионными константами **ω0**, **ω1**, $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(0)$ и $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(0)$, которые можно назначать произвольно. Формула (2.383) будет выглядеть более симметрично, если вместо **ω0**, **ω1** использовать другие константы: $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}(1)$ и $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}(1)$, имеющие смысл значений соот-

ветствующих кватернионных функций при $\tau = 1$. Через эти константы выражаются $\boldsymbol{\omega 0}$, $\boldsymbol{\omega 1}$ и их функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp\frac{\boldsymbol{\omega 0}}{2} &= \boldsymbol{\lambda 0}(1)\circ\boldsymbol{\lambda 0}(0)^{-1}; \quad \boldsymbol{\omega 0} = 2\cdot \mathrm{Ln}\left[\boldsymbol{\lambda 0}(1)\circ\boldsymbol{\lambda 0}(0)^{-1}\right]; \\ \exp\frac{\boldsymbol{\omega 1}}{2} &= \boldsymbol{\lambda 1}(0)^{-1}\circ\boldsymbol{\lambda 1}(1); \quad \boldsymbol{\omega 1} = 2\cdot \mathrm{Ln}\left[\boldsymbol{\lambda 1}(0)^{-1}\circ\boldsymbol{\lambda 1}(1)\right]; \end{aligned} \tag{2.384}$$

а интерполяционная формула (2.383) приобретает вид:

$$\mathbf{q}(\tau) = \left[\boldsymbol{\lambda 0}(1)\circ\boldsymbol{\lambda 0}(0)^{-1}\right]^{\tau}\circ\boldsymbol{\lambda 0}(0)\circ\boldsymbol{\lambda 1}(0)\circ\left[\boldsymbol{\lambda 1}(0)^{-1}\circ\boldsymbol{\lambda 1}(1)\right]^{\tau}. \tag{2.385}$$

Теперь набор кватернионных констант таков: $\boldsymbol{\lambda 0}(0)$, $\boldsymbol{\lambda 1}(0)$, $\boldsymbol{\lambda 0}(1)$ и $\boldsymbol{\lambda 1}(1)$. Для того, чтобы кватернионная кривая $\mathbf{q}(\tau)$ проходила через кватернионные точки $\mathbf{q0}$ и $\mathbf{q1}$, достаточно так распорядиться константами $\boldsymbol{\lambda 0}(0)$, $\boldsymbol{\lambda 1}(0)$, $\boldsymbol{\lambda 0}(1)$ и $\boldsymbol{\lambda 1}(1)$, чтобы:

$$\mathbf{q0} = \boldsymbol{\lambda 0}(0)\circ\boldsymbol{\lambda 1}(0); \quad \mathbf{q1} = \boldsymbol{\lambda 0}(1)\circ\boldsymbol{\lambda 1}(1). \tag{2.386}$$

В остальном выбор констант произволен. Это означает, что в руках исследователя остается возможность модифицировать интерполяционную функцию, чтобы придать ей дополнительные качества. В частности, если положить

$$\boldsymbol{\lambda 1}(0) = \boldsymbol{\lambda 1}(1), \tag{2.387}$$

придем к формуле (2.367) для сферической линейной интерполяции:

$$\mathbf{q}(\tau) = \left[\mathbf{q1}\circ\mathbf{q0}^{-1}\right]^{\tau}\circ\mathbf{q0}. \tag{2.388}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, надо подставить в формулу (2.388) выражения из формулы (2.386) и убедиться в том, что полученная формула совпадает с формулой (2.385) при соблюдении (2.388).

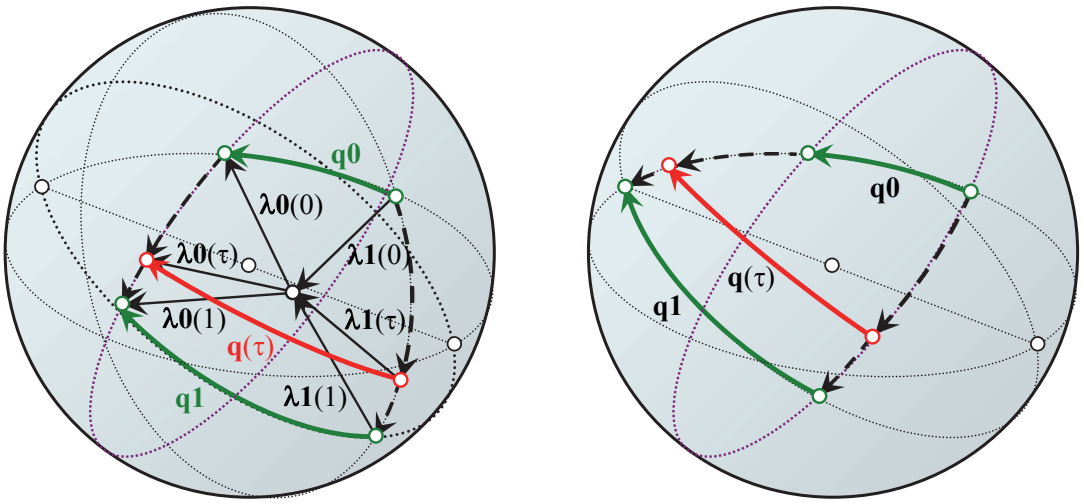


Рис. 2.22. Прецессионная интерполяция.
Слева – основной вариант, справа – альтернативный

Визуализация прецессионной интерполяции для случая нормированных кватернионов представлена на рис. 2.22. На левом рисунке показаны все компоненты интерполяционных формул (2.385) и (2.386). Видно, что кватернионы $\boldsymbol{\lambda 0}(\tau)$ и $\boldsymbol{\lambda 1}(\tau)$ преобразуются по правилам сферической линейной интерполяции, а кватернион $\mathbf{q}(\tau)$ является их произведением. На правом рисунке показан другой вариант прецессионной интерполяции тех же кватернионов. Оказывается, вариант интерполяции зависит от того, в каких местах больших кругов находятся дуги краевых значений **q0** и **q1** исследуемого кватерниона. Перемещая дугу вдоль большого круга, мы краевое значение кватерниона не меняем, но модифицируем правило интерполяции. Независимо перемещая начальную дугу и конечную дугу, имеем две степени свободы в рассматриваемой модификации. Возможно при помощи этого можно будет получить интересные эффекты в компьютерной анимации.

Предложенный вид интерполяции кватернионов является новым и нуждается в дополнительных исследованиях.

3. Винты

3.1. Дуальные числа

3.1.1. Основные понятия

Важную роль при переходе от проблемы ориентации тела к проблеме его положения в трехмерном пространстве играют специальные числа, называемые дуальными [29, 31]. Эти числа были введены английским математиком Уильямом Клиффордом [69].



Уильям Клиффорд
(1845–1879)

Дуальное число обычно представляют в следующей форме:

$$A = a + \varpi \cdot a^{\circ}, \tag{3.1}$$

где a и a° – действительные числа;

ϖ – особая единица, обладающая свойством:

$$\varpi^2 = 0. \tag{3.2}$$

Составную часть дуального числа a будем называть главной частью, а другую составную часть a° – моментом.

Заметим, что при решении геометрических задач особая единица ϖ имеет размерность, обратную размерности длины. В связи с этим составные части дуального числа имеют различные размерности, а именно, размерность момента получается из размерности главной части путем умножения ее на размерность длины. Если главная часть имеет размерность Н (Ньютон, сила), то размерность момента будет Нм (Ньютонометр, момент).

Введем новое понятие – параметр дуального числа, который будем обозначать неполными квадратными скобками:

$$\lceil A \rceil = \frac{a^{\circ}}{a}. \tag{3.3}$$

Дуальное число равно нулю, только если обе его составные части равны нулю:

$$a = 0; \quad a^{\circ} = 0. \tag{3.4}$$

Сложение и вычитание дуальных чисел определяется следующим образом:

$$A \pm B = (a + \varpi \cdot a^{\circ}) \pm (b + \varpi \cdot b^{\circ}) = (a \pm b) + \varpi \cdot (a^{\circ} \pm b^{\circ}). \tag{3.5}$$

Сложение и вычитание дуальных чисел коммутативно и ассоциативно.

Произведение дуальных чисел определяется так:

$$A \cdot B = (a \cdot b) + \varpi \cdot (a \cdot b^\circ + a^\circ \cdot b). \tag{3.6}$$

Умножение дуальных чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению.

Операция деления обратна операции умножения:

$$\frac{B}{A} = \frac{b}{a} + \varpi \cdot \frac{a \cdot b^\circ - a^\circ \cdot b}{a^2}. \tag{3.7}$$

Частным случаем является обращение дуального числа:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{a} - \varpi \cdot \frac{a^\circ}{a^2} = \frac{1}{a} - \varpi \cdot \frac{\lceil A \rceil}{a}. \tag{3.8}$$

Приведенные формулы показывают, что операции над дуальными числами подчиняются законам обычной алгебры, но с мнимой единицей ϖ надо поступать так, как с бесконечно малой величиной, квадратом и высшими степенями которой пренебрегают.

Укажем некоторые особенности умножения и деления дуальных чисел.

1. Произведение двух чисел обращается в нуль, когда по крайней мере одно из этих чисел равно нулю, или когда главные части обоих чисел равны нулю.
2. Параметр произведения двух чисел обращается в бесконечность, когда параметр по крайней мере одного числа обращается в бесконечность.
3. При $a_0 = 0$ и $b_0 = 0$ частное от деления выражается формулой:

$$\frac{B}{A} = \frac{b^\circ}{a^\circ} + \varpi \cdot k, \tag{3.9}$$

где k – не определено.

3.1.2. Дуальные функции

Будем рассматривать функции, областью определения и областью значений которых является множество дуальных чисел. Пусть в качестве аргумента выступает дуальная переменная $A = a + \varpi \cdot a^\circ$, а в качестве функции дуальная переменная $F = f + \varpi \cdot g$. Очевидно, функциональная зависимость между этими переменными в самом общем случае будет задана, если заданы скалярные функции $f(a, \cdot a^\circ)$ и $g(a, \cdot a^\circ)$. Таким образом,

$$F(A) = f(a, a^\circ) + \varpi \cdot g(a, a^\circ). \tag{3.10}$$

Особую важность имеют аналитические функции дуального аргумента. По аналогии с теорией функций комплексной переменной для аналитичности дуальной функции дуального аргумента необходимо и достаточно, чтобы функции $f(a, a^\circ)$ и $g(a, a^\circ)$ были дифференцируемы в каждой точке области определения и, кроме этого, выполнялись некоторые дифференциальные уравнения (аналог уравнений Коши-

Римана в теории функций комплексной переменной). Смысл этих уравнений заключается в том, чтобы приращение функции не зависело от способа стремления приращения аргумента $dA = da + \varpi\, da^\circ$ к нулю, то есть не зависело от отношения da°/da. Разумеется, направление, при котором $da = 0$, следует исключить из рассмотрения, поскольку на нуль делить нельзя. Следуя методике работы [17], запишем выражение для производной функции (3.10) в общем случае:

$$\frac{dF(A)}{dA} = \frac{df(a,a^\circ) + \varpi \cdot dg(a,a^\circ)}{da + \varpi \cdot da^\circ}. \tag{3.11}$$

Раскрывая эту запись, опуская аргументы при обозначениях функций, получим:

$$\frac{dF}{dA} = \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a^\circ} \cdot \frac{da^\circ}{da} + \varpi \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial a} + \left(\frac{\partial g}{\partial a^\circ} - \frac{\partial f}{\partial a} \right) \cdot \frac{da^\circ}{da} + \frac{\partial f}{\partial a^\circ} \cdot \left(\frac{da^\circ}{da} \right)^2 \right]. \tag{3.12}$$

Отсюда следуют условия аналитичности функции $F(A)$:

$$\frac{\partial f(a,a^\circ)}{\partial a^\circ} = 0; \quad \frac{\partial g(a,a^\circ)}{\partial a^\circ} = \frac{\partial f(a,a^\circ)}{\partial a}. \tag{3.13}$$

Первое из этих условий свидетельствует о том, что функция $f(a, a^\circ)$ на самом деле не зависит от a° и является функцией одной переменной a. Второе условие, будучи проинтегрированным, приводит к формуле для определения функции $g(a, a^\circ)$.

$$g(a,a^\circ) = a^\circ \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial a} + f^\circ(a), \tag{3.14}$$

где $f^\circ(a)$ – произвольная аналитическая функция вещественной переменной a.

В соответствии с работой [17] примем в качестве определения дуальной функции F дуального аргумента A аналитическую функцию:

$$F(A) = f(a) + \varpi \cdot \left[a^\circ \cdot \frac{\partial f(a)}{\partial a} + f^\circ(a) \right], \tag{3.15}$$

где f – одноименная с F аналитическая функция вещественной переменной.

Заметим, что функция $f^\circ(a)$ определяется значением функции F при $a^\circ = 0$.

По этому правилу функция синуса для дуального аргумента $A = a + \varpi \cdot a^\circ$ определится так:

$$\sin A = \sin a + \varpi \cdot a^\circ \cdot \frac{\partial \sin a}{\partial a} = \sin a + \varpi \cdot a^\circ \cdot \cos a. \tag{3.16}$$

Аналитическая функция $F(A, B,...)$ нескольких дуальных переменных определяется так:

$$F(A,B,...) = f(a,b,...) + \varpi \cdot \left(a^\circ \cdot \frac{\partial f(a,b,...)}{\partial a} + b^\circ \cdot \frac{\partial f(a,b,...)}{\partial b} + ... \right), \tag{3.17}$$

где b и b° – компоненты дуальной переменной B.

Отметим следующие свойства дуальных функций:

1. Если B – есть функция от A, то и A – есть функция от B.
2. Если C – есть функция от B, а B – есть функция от A, то и C – есть функция от A.
3. Если дуальные переменные связаны между собой уравнением $F(A, B) = 0$, то B – есть функция от A, а A – есть функция от B.

Наиболее употребительные дуальные функции приведены в приложении 9.4.

3.1.3. Производная и неопределенный интеграл дуальной функции

Для произвольной дуальной функции дуального аргумента, выражаемой формулой (3.10), производная может быть вычислена по формуле (3.12). Учитывая то, что отношение компонентов дифференциала dA является параметром этого дифференциала, формулу (3.12) можно переписать так:

$$\frac{dF}{dA}=\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial a^\circ}\cdot\lceil dA\rceil+\varpi\cdot\left[\frac{\partial g}{\partial a}+\left(\frac{\partial g}{\partial a^\circ}-\frac{\partial f}{\partial a}\right)\cdot\lceil dA\rceil+\frac{\partial f}{\partial a^\circ}\cdot\lceil dA\rceil^2\right]. \tag{3.18}$$

Для аналитической дуальной функции F дуального аргумента A имеем формулу:

$$\frac{dF(A)}{dA}=\frac{\partial f(a)}{\partial a}+\varpi\cdot a^\circ\cdot\frac{\partial^2 f(a)}{\partial a^2}. \tag{3.19}$$

Производная от функции $F(A)$ тоже является функцией от A.

Частная производная дуальной функции нескольких дуальных переменных по одному из аргументов имеет вид:

$$\frac{\partial F(A,B,...)}{\partial A}=\frac{\partial f(a,b,...)}{\partial a}+\varpi\cdot\left[a^\circ\cdot\frac{\partial^2 f(a,b,...)}{\partial a^2}+b^\circ\cdot\frac{\partial^2 f(a,b,...)}{\partial a\cdot\partial b}+...\right]. \tag{3.20}$$

Производные известных аналитических дуальных функций дуального аргумента имеют привычный вид:

$$\frac{d\exp A}{dA}=\exp A;\quad \frac{d\ln A}{dA}=\frac{1}{A};\quad \frac{d\sin A}{dA}=\cos A;\quad \frac{d\cos A}{dA}=-\sin A. \tag{3.21}$$

Неопределенный интеграл функции $F(A)$ выражается формулой:

$$F^{-1}(A)=f^{-1}(a)+\varpi\cdot a^\circ\cdot f(a)+C, \tag{3.22}$$

где $F^{-1}(A)$ – функция, производная которой равняется $F(A)$;
$C = c + \varpi\cdot c^\circ$ – произвольная дуальная константа.

3.2. Скользящие векторы

Раздел 1 мы посвятили свободным векторам – направленным отрезкам, которые можно перемещать в пространстве параллельно самим себе. В дальнейшем мы будем иметь дело не только со свободными, но и со скользящими векторами. Скользящий вектор, в отличие от свободного вектора, можно перемещать лишь вдоль прямой, на которой он лежит. Одним и тем же скользящим вектором считаются лишь те равные по длине и по направлению отрезки, которые лежат на одной прямой. Примером

скользящего вектора является вектор силы, приложенной к твердому телу, или вектор угловой скорости твердого тела.



Юлиус Плюккер
(1801–1868)

С целью вычислений векторы нужно представить в виде чисел, называемых координатами. Для этого будем пользоваться, как и ранее, прямоугольной декартовой системой координат, оси которой пронумерованы числами: 1, 2, 3. Свободный вектор **r** в трехмерном пространстве может быть однозначно представлен своими проекциями на координатные оси r_1, r_2, r_3.

Для того, чтобы задать скользящий вектор потребуется дополнительная информация. Наиболее интересен для наших целей метод, базирующийся на использовании координат, введенных немецким математиком Юлиусом Плюккером. Плюккеровы координаты для скользящего вектора – это шестерка чисел r_1, r_2, r_3; r°_1, r°_2, r°_3. Первая тройка из этих чисел – это обычные координаты свободного вектора **r**, вторая тройка – координаты вектора-момента $\mathbf{r}^\circ$ этого вектора относительно начала координат (рис. 3.1).

Плюккеровы координаты позволяют трактовать скользящий вектор как свободный вектор с дуальными координатами или, по-иному, как дуальный вектор:

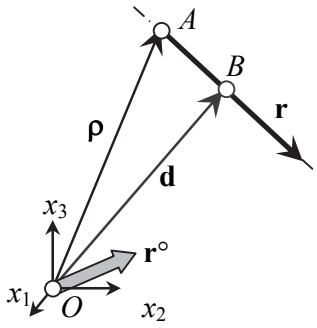


Рис. 3.1. К заданию скользящего вектора

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \varpi \cdot \mathbf{r}^\circ = \begin{bmatrix} r_1 + \varpi \cdot r^\circ_1 \\ r_2 + \varpi \cdot r^\circ_2 \\ r_3 + \varpi \cdot r^\circ_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.23)$$

Из векторного анализа известно, что координаты вектора-момента $\mathbf{r}^\circ$ можно выразить через координаты ρ_1, ρ_2, ρ_3 одной из точек, лежащих на линии скользящего вектора (точка *A* на рис. 3.1):

$$r^\circ_1 = \rho_2 \cdot r_3 - r_2 \cdot \rho_3;\; r^\circ_2 = \rho_3 \cdot r_1 - r_3 \cdot \rho_1;\; r^\circ_3 = \rho_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot \rho_2. \qquad (3.24)$$

Вектор-момент $\mathbf{r}^\circ$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{\rho}$ и **r**.

Зная плюккеровы координаты скользящего вектора, можно найти координаты точки *B* (см. рис. 3.1), находящейся на линии этого вектора по формуле:

$$d_1 = \frac{r_2 \cdot r^\circ_3 - r^\circ_2 \cdot r_3}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2};\quad d_2 = \frac{r_3 \cdot r^\circ_1 - r^\circ_3 \cdot r_1}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2};\quad d_3 = \frac{r_1 \cdot r^\circ_2 - r^\circ_1 \cdot r_2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}. \qquad (3.25)$$

В этих формулах учтено, что вектор момента ортогонален порождающему его вектору **r**:

$$r_1 \cdot r^\circ_1 + r_2 \cdot r^\circ_2 + r_3 \cdot r^\circ_3 = 0. \qquad (3.26)$$

Найденная точка обладает той особенностью, что ее радиус-вектор **d** перпендикулярен главному вектору **r**. В результате оказывается, что векторы **r**, **r**° и **d** попарно ортогональны.

Представление скользящего вектора при помощи плюккеровых координат удобно тем, что сложение скользящих векторов выполняется покомпонентно. При приложении к твердому телу нескольких векторов сил или нескольких векторов скоростей вращения, действия этих векторов можно складывать, суммируя почленно столбцы вида (3.23). В результате сложения мы получим суммарное выражение вида:

$$\mathbf{RS} = \mathbf{rs} + \varpi \cdot \mathbf{rs}^\circ = \begin{bmatrix} rs_1 + \varpi \cdot rs^\circ_1 \\ rs_2 + \varpi \cdot rs^\circ_2 \\ rs_3 + \varpi \cdot rs^\circ_3 \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

которое содержит координаты *rs* главного вектора и координаты *rs*° главного момента всех векторов, приложенных к твердому телу.

В формуле (3.27) уже не обязана соблюдаться ортогональность векторов. В общем случае, в отличие от формулы (3.26), получим:

$$rs_1 \cdot rs^\circ_1 + rs_2 \cdot rs^\circ_2 + rs_3 \cdot rs^\circ_3 \neq 0\,. \tag{3.28}$$

Эта величина называется инвариантом дуального вектора, а частное от деления инварианта на норму главного вектора – параметром дуального вектора:

$$\lceil \mathbf{RS} \rceil = \frac{rs_1 \cdot rs^\circ_1 + rs_2 \cdot rs^\circ_2 + rs_3 \cdot rs^\circ_3}{rs_1^2 + rs_2^2 + rs_3^2}\,. \tag{3.29}$$

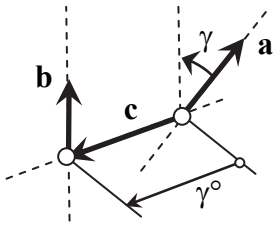


Рис. 3.2. Угол и расстояние между скользящими векторами

Введем понятие угла и расстояния между двумя скользящими векторами, а также понятие относительного момента этих векторов. Рассмотрим скользящие векторы **a** и **b (**рис. 3.2**)** и определяемые ими ориентированные прямые линии (будем называть их соответственно **a** и **b**). Эти прямые в общем случае будут скрещивающимися. Проведем третью прямую линию, пересекающую линии **a** и **b** и перпендикулярную им. Эта прямая определяет вектор **c**, начало которого находится в точке пересечения ее с прямой **a**, а конец – в точке пересечения с прямой **b.** Длина этого вектора, назовем ее γ°, является расстоянием между прямыми **a** и **b**. Переместим прямую **b** параллельно самой себе вдоль вектора **c** до пересечения с прямой **a** и измерим угол γ между положительными направлениями прямых **a** и **b** по кратчайшему угловому расстоянию. Его и будем называть углом между векторами **a** и **b** и между прямыми **a** и **b**. Теперь о правиле знаков. Угол γ выбирается из углового интервала [0, π] и считается положительным. Расстояние·γ° между прямыми будем считать положительным, если вектор **c** сонаправлен векторному произведению **a** × **b**, и отрицательным – в противном случае.

Угол и расстояние между скользящими векторами являются составными частями дуального угла между скользящими векторами:

$$\Gamma = \gamma + \varpi \cdot \gamma^\circ . \tag{3.30}$$

При этом угол γ является главной частью дуального угла, а расстояние$\cdot\gamma^\circ$ между векторами – его моментом.

Относительным моментом векторов **a** и **b** [17] называется скалярная величина, вычисляемая через угол γ и расстояние γ° между векторами **a** и **b** по формуле:

$$M = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \gamma^\circ \cdot \sin\gamma , \tag{3.31}$$

или через плюккеровы координаты векторов **a** и **b** по формуле:

$$M = a_1 \cdot b^\circ_1 + a_2 \cdot b^\circ_2 + a_3 \cdot b^\circ_3 + a^\circ_1 \cdot b_1 + a^\circ_2 \cdot b_2 + a^\circ_3 \cdot b_3 . \tag{3.32}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в идентичности формул (3.31) и (3.32). Как видно из формулы (3.32), относительный момент векторов **a** и **b** не меняется при перестановке векторов местами.

Рассмотрим задачу о нахождении плюккеровых координат вектора **a**, если известны его модуль $|\mathbf{a}|$ и дуальные углы с ортами координатной системы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$:

$$\Gamma_j = \gamma_j + \varpi \cdot \gamma^\circ_j \quad j = 1,2,3 . \tag{3.33}$$

Формулы прямого перехода таковы:

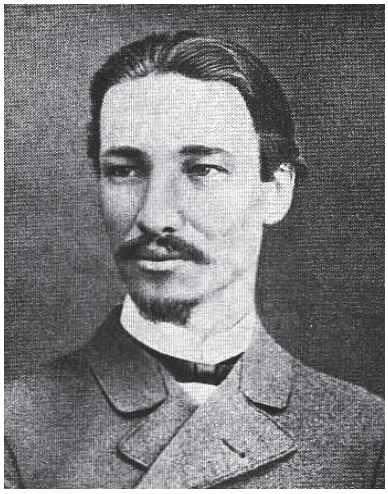
$$r_j = |\mathbf{a}| \cdot \cos\gamma_j ; \quad r^\circ_j = -|\mathbf{a}| \cdot \gamma^\circ_j \cdot \sin\gamma_j \quad j = 1,2,3 . \tag{3.34}$$

Обратный переход можно выполнить по формулам:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} ; \quad \gamma_j = \arccos\frac{r_j}{|\mathbf{a}|} ; \quad \gamma^\circ_j = -\frac{r^\circ_j}{\sqrt{|\mathbf{a}|^2 - r_j^2}} \quad (j = 1,2,3) . \tag{3.35}$$

3.3. Основные сведения о винтах

При изучении ориентации твердого тела с одной неподвижной точкой в трехмерном пространстве мы успешно использовали вектор. Если же речь идет об изучении положения или перемещения твердого тела в пространстве, лучшим инструментом для этого является винт. Раздел векторного исчисления, изучающий винты, называют винтовым исчислением. У истоков этого раздела стояли видные ученые конца 19-го века: А. П. Котельников [34], Р. Болл [68] и Э. Штуди [76]. В современном изложении теория винтов представлена в книгах Ф. М. Диментберга [17] и Ю. Н. Челнокова [60]. В область строительной механики винты ввел А. А. Уманский [56], называя их моторами.



Александр Петрович Котельников (1865 – 1944)

3.3.1. Понятие винта



Юрий Николаевич Челноков

Винт – это математическая модель объекта, наделенного информацией о векторе и моменте в трехмерном пространстве. Винты хорошо приспособлены для изучения механики твердого тела в пространстве. Наиболее общий случай перемещения свободного твердого тела в пространстве сводится к винтовому перемещению, характеризующемуся осью винтового перемещения, углом поворота тела вокруг этой оси и поступательным перемещением вдоль этой оси.

Если винтовое перемещение бесконечно малое, то, отнеся его к бесконечно малому промежутку времени, мы получим мгновенный винт скоростей, у которого вектором служит угловая скорость, а моментом – поступательная скорость тела. В этом случае скорость произвольной точки тела равна моменту винта относительно этой точки. Винт скоростей называется, по-другому, кинематическим винтом.

Наиболее общая пространственная система сил, действующих на тело, может быть приведена к силовому винту (динаме), если силы, действующие на твердое тело, рассматривать как скользящие векторы.

В своей работе по винтовому исчислению [34] А. П. Котельников сформулировал и доказал чрезвычайно важный "принцип перенесения", устанавливающий соответствие между свободными векторами и винтами таким образом, что все закономерности в области векторов, если заменить в них обычные векторы и числа дуальными, формально сохраняются и для винтов. В это же время немецкий геометр Э. Штуди, не зная о работе А. П. Котельникова, уже пользовался таким же принципом, а несколько позже опубликовал его в работе [76]. Мы в дальнейшем изложении будем без доказательства пользоваться этим принципом при установлении закономерностей для винтов, называя его принципом перенесения Котельникова-Штуди.

Винт обычно будем обозначать заглавной жирной буквой латинского или греческого алфавита. Рассмотрим основные понятия на примере винта $\boldsymbol{\Psi}$.

Винт $\boldsymbol{\Psi}$ может быть представлен как трехмерный вектор с дуальными компонентами или как дуальный вектор, состоящий из векторной части $\boldsymbol{\psi}$ и моментной части $\boldsymbol{\psi}^\circ$:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\psi} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^\circ = \begin{bmatrix} \psi_1 + \varpi \cdot \psi^\circ_1 \\ \psi_2 + \varpi \cdot \psi^\circ_2 \\ \psi_3 + \varpi \cdot \psi^\circ_3 \end{bmatrix}. \qquad (3.36)$$

Объекты $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\psi}^\circ$ – трехмерные векторы с компонентами ψ_i и ψ°_i (i = 1, 2, 3), являющимися координатами этих векторов в заранее выбранной декартовой системе координат.

Физический смысл рассматриваемых векторов может быть различным, однако в трехмерном метрическом пространстве размерность координат моментной части

получается путем умножения размерности координат векторной части на размерность длины.

Скалярной характеристикой винта является его параметр – действительное число, имеющее размерность длины:

$$\lceil \boldsymbol{\Psi} \rceil = \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ}}{\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}} = \frac{\psi_1 \cdot \psi^{\circ}{}_1 + \psi_2 \cdot \psi^{\circ}{}_2 + \psi_3 \cdot \psi^{\circ}{}_3}{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}. \tag{3.37}$$

Он определен, если норма векторной части винта отлична от нуля.

Важным частным случаем винта является единичный винт:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^{\circ} = \begin{bmatrix} e_1 + \varpi \cdot e^{\circ}{}_1 \\ e_2 + \varpi \cdot e^{\circ}{}_2 \\ e_3 + \varpi \cdot e^{\circ}{}_3 \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

у которого модуль векторной части равен единице, а параметр равен нулю, то есть соблюдаются такие равенства:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1; \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^{\circ} = 0. \tag{3.39}$$

Поэлементное представление последних равенств таково:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1; \quad e_1 \cdot e^{\circ}{}_1 + e_2 \cdot e^{\circ}{}_2 + e_3 \cdot e^{\circ}{}_3 = 0. \tag{3.40}$$

Единичный винт фактически является скользящим вектором единичной длины, определяющим ориентированную прямую.

В соответствии с принципом Котельникова-Штуди на винт можно перенести понятия нормы вектора (после перенесения – норма винта) и модуля вектора (после перенесения – модуль винта).

Норма винта – это дуальное число, которое вычисляется аналогично вычислению нормы вектора:

$$\left\| \boldsymbol{\Psi} \right\| = (\boldsymbol{\psi} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ}) \cdot (\boldsymbol{\psi} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ}) = \left\| \boldsymbol{\psi} \right\| + \varpi \cdot 2 \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ} = \left\| \boldsymbol{\psi} \right\| \cdot \left(1 + \varpi \cdot 2 \cdot \lceil \boldsymbol{\Psi} \rceil\right). \tag{3.41}$$

Модуль винта – это дуальное число, равное корню квадратному из его нормы:

$$\left| \boldsymbol{\Psi} \right| = \sqrt{\left\| \boldsymbol{\Psi} \right\|} = \left| \boldsymbol{\psi} \right| + \varpi \cdot \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ}}{\left| \boldsymbol{\psi} \right|} = \left| \boldsymbol{\psi} \right| \cdot \left(1 + \varpi \cdot \lceil \boldsymbol{\Psi} \rceil\right). \tag{3.42}$$

В поэлементной записи модуль винта выглядит так:

$$\left| \boldsymbol{\Psi} \right| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2} + \varpi \cdot \frac{\psi_1 \cdot \psi^{\circ}{}_1 + \psi_2 \cdot \psi^{\circ}{}_2 + \psi_3 \cdot \psi^{\circ}{}_3}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}}. \tag{3.43}$$

Он определен, если модуль векторной части винта отличен от нуля.

Выше мы пользовались бивекторной записью винта, где винт был представлен двумя векторами $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\psi}^{\circ}$. Кроме нее существует другая, так называемая винтовая запись, когда рассматриваемый винт представлен единичным винтом $\mathbf{E} = \mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^{\circ}$ и

дуальным числом $\Psi = \psi + \varpi \cdot \psi^\circ$. Единичный винт **E** определяет ось рассматриваемого винта. Физический смысл дуального числа Ψ связан с физическим смыслом винта. Если речь идет о кинематическом винте, главная часть дуального числа ψ представляет собой угловую скорость вращения тела вокруг оси винта, а моментная часть ψ° – скорость поступательного перемещения тела вдоль оси винта. Если речь идет о силовом винте (динаме), главная часть дуального числа ψ представляет собой сумму проекций всех сил, приложенных к телу, на ось винта, а моментная часть ψ° – сумму моментов всех сил, действующих на тело, относительно оси винта.

Переход от винтовой записи к бивекторной выполняется по формулам:

$$\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^\circ = \Psi \cdot \mathbf{E} = (\psi + \varpi \cdot \psi^\circ) \cdot (\mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^\circ). \tag{3.44}$$

Координатное представление этого равенства таково:

$$\psi_i = \psi \cdot e_i; \quad \psi^\circ{}_i = \psi \cdot e^\circ{}_i + \psi^\circ \cdot e_i \quad (i = 1,2,3). \tag{3.45}$$

Обратный переход от бивекторной формы к винтовой выполняется так:

$$\psi = |\boldsymbol{\psi}|; \quad \psi^\circ = \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}^\circ}{|\boldsymbol{\psi}|}; \quad \mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\psi}}{|\boldsymbol{\psi}|}; \quad \lceil \mathbf{\Psi} \rceil = \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}^\circ}{\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}}; \quad \mathbf{e}^\circ = \frac{\boldsymbol{\psi}^\circ - \lceil \mathbf{\Psi} \rceil \cdot \boldsymbol{\psi}}{|\boldsymbol{\psi}|}. \tag{3.46}$$

Заметим, что прямое преобразование по формулам (3.44), (3.45) выполняется в любом случае, а для обратного перехода необходимо, чтобы модуль векторной части винта $\mathbf{\Psi}$ был отличен от нуля.

3.3.2. Разложение винта по заданной оси

Аналогично тому, как в разделе 2.5.3 выполнялось разложение кватерниона по заданному направлению, выпишем формулы для разложения винта по заданной оси.

Рассмотрим произвольный винт **R** и произвольную ось, заданную единичным винтом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^\circ. \tag{3.47}$$

Винт **R** можно представить в виде суммы двух винтов:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Rc} + \mathbf{Rn}, \tag{3.48}$$

первый из которых коаксиален заданной оси и выражается формулой:

$$\mathbf{Rc} = R_\otimes \cdot \mathbf{E}; \quad R_\otimes = E_1 \cdot R_1 + E_2 \cdot R_2 + E_3 \cdot R_3, \tag{3.49}$$

а второй нормален ему:

$$\mathbf{Rn} = \mathbf{R} - \mathbf{Rc}. \tag{3.50}$$

$R_\otimes$ – дуальное число, называемое проекцией винта на ось (см. раздел 3.4.3).

3.3.3. Дуальный угол между двумя осями

Дуальный угол между направленными осями **E1** и **E2**, является дуальным числом $A = \alpha^\circ + \varpi \cdot \alpha^\circ$. Для его определения полезно привлечь к рассмотрению еще одну ось

E, пересекающую оси **E1** и **E2** под прямым углом и направленную так, что оси **E1**, **E2** и **E** образуют правую тройку (рис. 3.3).

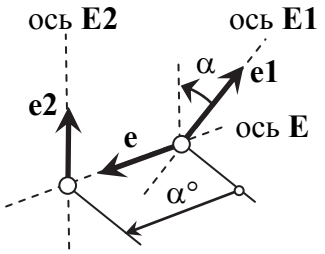


Рис. 3.3. Угол и расстояние между двумя осями

Тогда α – обычный угол между осями **E1** и **E2** ($0 \le \alpha \le \pi$), α° – расстояние от оси **E1** до оси **E2**, измеренное вдоль оси **E**. Это расстояние считается положительным, если путь от оси **E1** к оси **E2** сонаправлен оси **E**, и отрицательным в противном случае.

Дуальный угол A связан с винтом:

$$\mathbf{A} = \mathrm{A} \cdot \mathbf{E} = (\alpha + \varpi \cdot \alpha^\circ) \cdot \mathbf{E}\,, \tag{3.51}$$

где **E** – единичный винт, определяющий ось **E**.

Этот винт может быть интерпретирован как винтовое перемещение оси **E2** из ее начального положения, совпадающего с осью **E1**, в ее конечное положение.

Полагая, что винты направленных осей **E1** и **E2** имеют дуальное представление:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E1} = \begin{bmatrix} e1_1 + \varpi \cdot e1^\circ_1 \\ e1_2 + \varpi \cdot e1^\circ_2 \\ e1_3 + \varpi \cdot e1^\circ_3 \end{bmatrix}; \quad e1_1^2 + e1_2^2 + e1_3^2 = 1; \quad e1_1 \cdot e1^\circ_1 + e1_2 \cdot e1^\circ_2 + e1_3 \cdot e1^\circ_3 = 0; \\
&\mathbf{E2} = \begin{bmatrix} e2_1 + \varpi \cdot e2^\circ_1 \\ e2_2 + \varpi \cdot e2^\circ_2 \\ e2_3 + \varpi \cdot e2^\circ_3 \end{bmatrix}; \quad e2_1^2 + e2_2^2 + e2_3^2 = 1; \quad e2_1 \cdot e2^\circ_1 + e2_2 \cdot e2^\circ_2 + e2_3 \cdot e2^\circ_3 = 0,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

координатное представление дуального угла между осями можно записать так:

$$\begin{aligned}
&\alpha = \arccos(e1_1 \cdot e2_1 + e1_2 \cdot e2_2 + e1_3 \cdot e2_3); \\
&\alpha^\circ = -\frac{e1_1 \cdot e2^\circ_1 + e1_2 \cdot e2^\circ_2 + e1_3 \cdot e2^\circ_3 + e1^\circ_1 \cdot e2_1 + e1^\circ_2 \cdot e2_2 + e1^\circ_3 \cdot e2_3}{\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Как видно из формул (3.53), дуальный угол не зависит от порядка следования осей, между которыми он измеряется.

Дуальное представление оси **E** выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^\circ = \frac{1}{\sin \mathrm{A}} \cdot \begin{bmatrix} E1_2 \cdot E2_3 - E1_3 \cdot E2_2 \\ E1_3 \cdot E2_1 - E1_1 \cdot E2_3 \\ E1_1 \cdot E2_2 - E1_2 \cdot E2_1 \end{bmatrix}. \tag{3.54}$$

В развернутом виде можно записать:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \begin{bmatrix} e1_2 \cdot e2_3 - e1_3 \cdot e2_2 \\ e1_3 \cdot e2_1 - e1_1 \cdot e2_3 \\ e1_1 \cdot e2_2 - e1_2 \cdot e2_1 \end{bmatrix}; \tag{3.55}$$

$$\mathbf{e}^{\circ}=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\begin{bmatrix} e1_2\cdot e2^{\circ}_3-e1_3\cdot e2^{\circ}_2+e1^{\circ}_2\cdot e2_3-e1^{\circ}_3\cdot e2_2 \\ e1_3\cdot e2^{\circ}_1-e1_1\cdot e2^{\circ}_3+e1^{\circ}_3\cdot e2_1-e1^{\circ}_1\cdot e2_3 \\ e1_1\cdot e2^{\circ}_2-e1_2\cdot e2^{\circ}_1+e1^{\circ}_1\cdot e2_2-e1^{\circ}_2\cdot e2_1 \end{bmatrix}-\frac{\alpha^{\circ}}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}\cdot\begin{bmatrix} e1_2\cdot e2_3-e1_3\cdot e2_2 \\ e1_3\cdot e2_1-e1_1\cdot e2_3 \\ e1_1\cdot e2_2-e1_2\cdot e2_1 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Из этих формул вытекает, что при изменении порядка следования осей **E1** и **E2** направление оси **E** изменяется на противоположное.

3.4. Операции над винтами

3.4.1. Умножение винта на число

Умножение винта на вещественное число a определяется как построение такого винта, вектор которого равен вектору данного винта, умноженному на это число, и момент которого равен моменту данного винта, умноженному на то же число. При умножении винта на вещественное число все компоненты винта умножаются на это число:

$$\mathbf{\Psi}\cdot a=\begin{bmatrix}\Psi_1\cdot a\\ \Psi_2\cdot a\\ \Psi_3\cdot a\end{bmatrix}=\boldsymbol{\psi}\cdot a+\varpi\cdot\boldsymbol{\psi}^{\circ}\cdot a=\begin{bmatrix}\psi_1\cdot a+\varpi\cdot\psi^{\circ}_1\cdot a\\ \psi_2\cdot a+\varpi\cdot\psi^{\circ}_2\cdot a\\ \psi_3\cdot a+\varpi\cdot\psi^{\circ}_3\cdot a\end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

В результате умножения винта на вещественное число получается коаксиальный винт. Если a – положительное число, то направления осей винтов $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Psi}\cdot a$ совпадают, если a – отрицательное число, то направления винтов $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Psi}\cdot a$ противоположны.

При умножении винта $\mathbf{\Psi}$ на дуальное число $A = a + \varpi\cdot a^{\circ}$ получим винт

$$\mathbf{\Psi}\cdot A=\begin{bmatrix}\Psi_1\cdot A\\ \Psi_2\cdot A\\ \Psi_3\cdot A\end{bmatrix}=\boldsymbol{\psi}\cdot a+\varpi\cdot(\boldsymbol{\psi}\cdot a^{\circ}+\boldsymbol{\psi}^{\circ}\cdot a)=\begin{bmatrix}\psi_1\cdot a+\varpi\cdot(\psi_1\cdot a^{\circ}+\psi_1{}^{\circ}\cdot a)\\ \psi_2\cdot a+\varpi\cdot(\psi_2\cdot a^{\circ}+\psi_2{}^{\circ}\cdot a)\\ \psi_3\cdot a+\varpi\cdot(\psi_3\cdot a^{\circ}+\psi_3{}^{\circ}\cdot a)\end{bmatrix} \quad (3.58)$$

с той же осью, что и у исходного винта, с длиной вектора, равной произведению длины вектора исходного винта на главную часть дуального числа и с параметром

$$\lceil\mathbf{\Psi}\cdot A\rceil=\frac{\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\psi}^{\circ}}{\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{\psi}}+\frac{a^{\circ}}{a}=\lceil\mathbf{\Psi}\rceil+\lceil A\rceil. \quad (3.59)$$

равным сумме параметров исходного винта и дуального числа. Если a – положительное число, то направления осей винтов $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Psi}\cdot A$ совпадают, если a – отрицательное число, то направления винтов $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Psi}\cdot A$ противоположны.

Любой винт может быть определен как произведение единичного винта **E**, определяющего его ось, на дуальное число $\Phi = \varphi + \varpi\cdot\varphi^{\circ}$.

$$\mathbf{E}\cdot\Phi=\mathbf{e}\cdot\varphi+\varpi\cdot(\mathbf{e}\cdot\varphi^{\circ}+\mathbf{e}^{\circ}\cdot\varphi)=\begin{bmatrix}e_1\cdot\varphi+\varpi\cdot(e_1\cdot\varphi^{\circ}+e_1{}^{\circ}\cdot\varphi)\\ e_2\cdot\varphi+\varpi\cdot(e_2\cdot\varphi^{\circ}+e_2{}^{\circ}\cdot\varphi)\\ e_3\cdot\varphi+\varpi\cdot(e_3\cdot\varphi^{\circ}+e_3{}^{\circ}\cdot\varphi)\end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Длина вектора винта равна главной части дуального числа, а параметр винта – параметру дуального числа.

3.4.2. Скалярное умножение винтов

Под скалярным произведением двух винтов **Ψ1** и **Ψ2** понимается дуальное число, равное скалярному произведению их дуальных векторов:

$$\mathbf{\Psi 1}\cdot\mathbf{\Psi 2}=(\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}+\varpi\cdot\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}^{\circ})\cdot(\boldsymbol{\psi}\mathbf{2}+\varpi\cdot\boldsymbol{\psi}\mathbf{2}^{\circ})=\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\psi}\mathbf{2}+\varpi\cdot(\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\psi}\mathbf{2}^{\circ}+\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}^{\circ}\cdot\boldsymbol{\psi}\mathbf{2}), \tag{3.61}$$

где **ψ1** и **ψ2** – векторные части, а **ψ1°** и **ψ2°** – моментные части винтов **Ψ1** и **Ψ2**.

Покомпонентно векторы представляются так:

$$\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}=\begin{bmatrix}\psi 1_1\\ \psi 1_2\\ \psi 1_3\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\psi}\mathbf{2}=\begin{bmatrix}\psi 2_1\\ \psi 2_2\\ \psi 2_3\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\psi}\mathbf{1}^{\circ}=\begin{bmatrix}\psi 1^{\circ}_1\\ \psi 1^{\circ}_2\\ \psi 1^{\circ}_3\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\psi}\mathbf{2}^{\circ}=\begin{bmatrix}\psi 2^{\circ}_1\\ \psi 2^{\circ}_2\\ \psi 2^{\circ}_3\end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Скалярное произведение винтов можно записать и по-иному:

$$\mathbf{\Psi 1}\cdot\mathbf{\Psi 2}=\Psi 1_1\cdot\Psi 2_1+\Psi 1_2\cdot\Psi 2_2+\Psi 1_3\cdot\Psi 2_3, \tag{3.63}$$

где $\Psi 1_i$ и $\Psi 2_i$ (i = 1, 2, 3) – дуальные компоненты винтов **Ψ1** и **Ψ2**.

Дуальные компоненты можно выразить через действительные компоненты:

$$\Psi 1_i=\psi 1_i+\varpi\cdot\psi 1^{\circ}_i;\quad \Psi 2_i=\psi 2_i+\varpi\cdot\psi 2^{\circ}_i\quad (i=1,2,3). \tag{3.64}$$

Независимо от того, пользуемся мы формулой (3.61) или формулой (3.63), в действительных компонентах скалярное произведение представляется так:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi 1}\cdot\mathbf{\Psi 2}&=\psi 1_1\cdot\psi 2_1+\psi 1_2\cdot\psi 2_2+\psi 1_3\cdot\psi 2_3+\\ &+\varpi\cdot(\psi 1_1\cdot\psi 2^{\circ}_1+\psi 1_2\cdot\psi 2^{\circ}_2+\psi 1_3\cdot\psi 2^{\circ}_3+\psi 1^{\circ}_1\cdot\psi 2_1+\psi 1^{\circ}_2\cdot\psi 2_2+\psi 1^{\circ}_3\cdot\psi 2_3).\end{aligned} \tag{3.65}$$

Главная часть скалярного произведения двух винтов есть обычное скалярное произведение векторов этих винтов, а моментная часть – относительный момент винтов. Скалярное произведение винтов коммутативно.

Рассмотрим скалярное произведение единичных винтов **E1** и **E2**. Применяя принцип перенесения Котельникова-Штуди к скалярному произведению свободных единичных векторов, для скалярного произведения единичных винтов получим:

$$\mathbf{E1}\cdot\mathbf{E2}=\cos\mathrm{A}, \tag{3.66}$$

где A – дуальный угол между винтами **E1** и **E2**.

Если представить винты в виде

$$\mathbf{\Psi 1}=\Psi 1\cdot\mathbf{E1};\quad \mathbf{\Psi 2}=\Psi 2\cdot\mathbf{E2}, \tag{3.67}$$

где **E1** и **E2** – единичные винты их осей, а Ψ1 и Ψ2 – их дуальные длины, получим:

$$\mathbf{\Psi 1}\cdot\mathbf{\Psi 2}=\Psi 1\cdot\Psi 2\cdot\mathbf{E1}\cdot\mathbf{E2}=\Psi 1\cdot\Psi 2\cdot\cos\mathrm{A}. \tag{3.68}$$

Таким образом, скалярное произведение двух винтов равно произведению их дуальных длин на косинус дуального угла между их осями.

Более детально его можно расписать так:

$$\boldsymbol{\Psi 1}\cdot\boldsymbol{\Psi 2}=\psi 1\cdot\psi 2\cdot\cos\alpha+\varpi\cdot\left[\left(\psi 1\cdot\psi 2^{\circ}+\psi 1^{\circ}\cdot\psi 2\right)\cdot\cos\alpha-\psi 1\cdot\psi 2\cdot\alpha^{\circ}\cdot\sin\alpha\right], \qquad (3.69)$$

где смысл обозначений вытекает из соотношений:

$$\Psi 1=\psi 1+\varpi\cdot\psi 1^{\circ};\quad \Psi 2=\psi 2+\varpi\cdot\psi 2^{\circ};\quad \mathrm{A}=\alpha+\varpi\cdot\alpha^{\circ}. \qquad (3.70)$$

Заметим, что α – обычный угол между ориентированными прямыми, α° – ориентированное расстояние между ними.

Скалярное произведение винтов не зависит от выбора системы координат.

3.4.3. Проекция винта на ось

Пусть $\boldsymbol{\Psi}$ – произвольный винт, а $\mathbf{E}$ – единичный винт, задающий в пространстве некоторую ось. Составим их скалярное произведение:

$$\boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{E}=\Psi\cdot\cos\mathrm{A}=\psi\cdot\cos\alpha+\varpi\cdot\psi\cdot\left(\lceil\boldsymbol{\Psi}\rceil\cdot\cos\alpha-\alpha^{\circ}\cdot\sin\alpha\right), \qquad (3.71)$$

где Ψ – дуальная длина винта $\boldsymbol{\Psi}$, $\lceil\boldsymbol{\Psi}\rceil$ – параметр винта $\boldsymbol{\Psi}$, A – дуальный угол между осью винта $\boldsymbol{\Psi}$ и осью $\mathbf{E}$.

Этим выражением определяется проекция винта $\boldsymbol{\Psi}$ на ось $\mathbf{E}$, равная произведению дуальной длины винта $\boldsymbol{\Psi}$ на косинус дуального угла, образуемого осью винта $\boldsymbol{\Psi}$ с данной осью $\mathbf{E}$. Проекция винта на ось – дуальное число.

Покомпонентно проекция винта на ось представляется так:

$$\boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{E}=\psi_1\cdot e_1+\psi_2\cdot e_2+\psi_3\cdot e_3+\varpi\cdot(\psi_1\cdot e^{\circ}_1+\psi_2\cdot e^{\circ}_2+\psi_3\cdot e^{\circ}_3+\psi^{\circ}_1\cdot e_1+\psi^{\circ}_2\cdot e_2+\psi^{\circ}_3\cdot e_3). \qquad (3.72)$$

3.4.4. Винтовое умножение винтов

Под винтовым произведением двух винтов $\boldsymbol{\Psi 1}$ и $\boldsymbol{\Psi 2}$ будем понимать винт, дуальный вектор которого равен векторному произведению дуальных векторов заданных винтов. Винтовое умножение будем обозначать крестом.

$$\boldsymbol{\Psi 1}\times\boldsymbol{\Psi 2}=(\boldsymbol{\psi 1}+\varpi\cdot\boldsymbol{\psi 1}^{\circ})\times(\boldsymbol{\psi 2}+\varpi\cdot\boldsymbol{\psi 2}^{\circ})=\boldsymbol{\psi 1}\times\boldsymbol{\psi 2}+\varpi\cdot(\boldsymbol{\psi 1}\times\boldsymbol{\psi 2}^{\circ}+\boldsymbol{\psi 1}^{\circ}\times\boldsymbol{\psi 2}). \qquad (3.73)$$

Покомпонентно винтовое произведение записывается так:

$$\boldsymbol{\Psi 1}\times\boldsymbol{\Psi 2}=\begin{bmatrix}\psi 1_2\cdot\psi 2_3-\psi 1_3\cdot\psi 2_2\\ \psi 1_3\cdot\psi 2_1-\psi 1_1\cdot\psi 2_3\\ \psi 1_1\cdot\psi 2_2-\psi 1_2\cdot\psi 2_1\end{bmatrix}+\varpi\cdot\begin{bmatrix}\psi 1_2\cdot\psi 2^{\circ}_3-\psi 1_3\cdot\psi 2^{\circ}_2+\psi 1^{\circ}_2\cdot\psi 2_3-\psi 1^{\circ}_3\cdot\psi 2_2\\ \psi 1_3\cdot\psi 2^{\circ}_1-\psi 1_1\cdot\psi 2^{\circ}_3+\psi 1^{\circ}_3\cdot\psi 2_1-\psi 1^{\circ}_1\cdot\psi 2_3\\ \psi 1_1\cdot\psi 2^{\circ}_2-\psi 1_2\cdot\psi 2^{\circ}_1+\psi 1^{\circ}_1\cdot\psi 2_2-\psi 1^{\circ}_2\cdot\psi 2_1\end{bmatrix}. \qquad (3.74)$$

Рассмотрим винтовое произведение единичных винтов $\mathbf{E1}$ и $\mathbf{E2}$. Применяя принцип перенесения Котельникова-Штуди к векторному произведению свободных единичных векторов, для винтового произведения единичных винтов получим:

$$\mathbf{E1}\times\mathbf{E2}=\mathbf{E}\cdot\sin\mathrm{A}, \qquad (3.75)$$

где **E** – единичный винт, ось которого пересекает оси винтов **E1** и **E2** под прямым углом и направлена так, что оси винтов **E1**, **E2** и **E** образуют правую тройку; A – дуальный угол между осями винтов **E1** и **E2**.

Если представить винты **Ψ1** и **Ψ2** в виде:

$$\mathbf{\Psi 1} = \Psi 1 \cdot \mathbf{E1}; \quad \mathbf{\Psi 2} = \Psi 2 \cdot \mathbf{E2}, \tag{3.76}$$

где **E1** и **E2** – единичные винты их осей, а Ψ1 и Ψ2 – их дуальные длины, то получим:

$$\mathbf{\Psi 1} \times \mathbf{\Psi 2} = \Psi 1 \cdot \Psi 2 \cdot \mathbf{E1} \times \mathbf{E2} = \Psi 1 \cdot \Psi 2 \cdot \mathbf{E} \cdot \sin \mathrm{A}; \tag{3.77}$$

где обозначения единичных винтов и угла A такие же, как и в формуле (3.68).

Таким образом, винтовое произведение двух винтов есть винт, ось которого пересекает под прямым углом оси перемножаемых винтов, вектор которого имеет направление векторного произведения векторов этих винтов, а дуальный модуль – произведение дуальных модулей этих винтов на синус дуального угла, образуемого их осями.

При перестановке сомножителей винтовое произведение меняет свой знак на противоположный:

$$\mathbf{\Psi 1} \times \mathbf{\Psi 2} = -\mathbf{\Psi 2} \times \mathbf{\Psi 1}. \tag{3.78}$$

3.4.5. Смешанное умножение винтов

Смешанное произведение есть дуальное число, являющееся результатом перемножения трех винтовых сомножителей **Ψ1**, **Ψ2** и **Ψ3** в соответствии с одной из формул:

$$(\mathbf{\Psi 1} \times \mathbf{\Psi 2}) \cdot \mathbf{\Psi 3} = (\mathbf{\Psi 3} \times \mathbf{\Psi 1}) \cdot \mathbf{\Psi 2} = (\mathbf{\Psi 2} \times \mathbf{\Psi 3}) \cdot \mathbf{\Psi 1} = (\mathbf{\Psi 1}, \mathbf{\Psi 2}, \mathbf{\Psi 3}) = \begin{vmatrix} \Psi 1_1 & \Psi 1_2 & \Psi 1_3 \\ \Psi 2_1 & \Psi 2_2 & \Psi 2_3 \\ \Psi 3_1 & \Psi 3_2 & \Psi 3_3 \end{vmatrix}. \tag{3.79}$$

Иногда смешанное произведение обозначают (**Ψ1**, **Ψ2**, **Ψ3**). Так же, как и в случае свободных векторов, циклическая перестановка сомножителей не меняет результата. Смешанное произведение можно получить как детерминант матрицы, составленной из дуальных компонентов перемножаемых винтов. Все эти свойства отражены в формулах (3.79).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{P} = \left[\psi_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \psi 1_1 & \psi 1_2 & \psi 1_3 \\ \psi 2_1 & \psi 2_2 & \psi 2_3 \\ \psi 3_1 & \psi 3_2 & \psi 3_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^\circ = \left[\psi^\circ_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \psi 1^\circ_1 & \psi 1^\circ_2 & \psi 1^\circ_3 \\ \psi 2^\circ_1 & \psi 2^\circ_2 & \psi 2^\circ_3 \\ \psi 3^\circ_1 & \psi 3^\circ_2 & \psi 3^\circ_3 \end{bmatrix}; \tag{3.80}$$

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \psi 2_2 \cdot \psi 3_3 - \psi 2_3 \cdot \psi 3_2 & \psi 2_3 \cdot \psi 3_1 - \psi 2_1 \cdot \psi 3_3 & \psi 2_1 \cdot \psi 3_2 - \psi 2_2 \cdot \psi 3_1 \\ \psi 3_2 \cdot \psi 1_3 - \psi 3_3 \cdot \psi 1_2 & \psi 3_3 \cdot \psi 1_1 - \psi 3_1 \cdot \psi 1_3 & \psi 3_1 \cdot \psi 1_2 - \psi 3_2 \cdot \psi 1_1 \\ \psi 1_2 \cdot \psi 2_3 - \psi 1_3 \cdot \psi 2_2 & \psi 1_3 \cdot \psi 2_1 - \psi 1_1 \cdot \psi 2_3 & \psi 1_1 \cdot \psi 2_2 - \psi 1_2 \cdot \psi 2_1 \end{bmatrix}. \tag{3.81}$$

Здесь **P** – матрица, составленная из главных компонентов перемножаемых винтов, **P°** – матрица, составленная из моментных компонентов перемножаемых винтов, **A** – матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы **P** в определителе этой матрицы**.**

Тогда на основании детерминантной формулы получим:

$$(\boldsymbol{\Psi 1}, \boldsymbol{\Psi 2}, \boldsymbol{\Psi 3}) = \left|\boldsymbol{\psi} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ}\right| = \left|\psi_{ij} + \varpi \cdot \psi^{\circ}{}_{ij}\right| = \left|\psi_{ij}\right| + \varpi \cdot \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot \psi^{\circ}{}_{ij} \,. \tag{3.82}$$

Если детерминант матрицы, составленной из главных компонентов перемножаемых винтов **P** отличен от нуля, существует обратная матрица $\mathbf{P}^{-1}$ с элементами, вычисляемыми через алгебраические дополнения a_{ij} по формуле:

$$a_{ij} \Big/ \left|\psi_{ij}\right| . \tag{3.83}$$

В этом случае формуле (3.82) можно придать вид:

$$(\boldsymbol{\Psi 1}, \boldsymbol{\Psi 2}, \boldsymbol{\Psi 3}) = \left|\mathbf{P}\right| \cdot \left[1 + \varpi \cdot \mathrm{Sp}(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\circ})\right], \tag{3.84}$$

где обозначение Sp означает след матрицы, то есть сумму всех элементов матрицы, находящихся на ее главной диагонали.

3.4.6. Сложение винтов.

Винт **Ψ** называется суммой заданных винтов **Ψ1** и **Ψ2**, если его вектор равен сумме векторов, а момент равен сумме моментов слагаемых винтов. Иными словами, винты складываются покомпонентно:

$$\boldsymbol{\Psi 1} + \boldsymbol{\Psi 2} = (\boldsymbol{\psi 1} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi 1}^{\circ}) + (\boldsymbol{\psi 2} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi 2}^{\circ}) = \boldsymbol{\psi 1} + \boldsymbol{\psi 2} + \varpi \cdot (\boldsymbol{\psi 1}^{\circ} + \boldsymbol{\psi 2}^{\circ}) . \tag{3.85}$$

Покомпонентная запись имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Psi 1} + \boldsymbol{\Psi 2} = \begin{bmatrix} \psi 1_1 + \varpi \cdot \psi 1^{\circ}{}_1 \\ \psi 1_2 + \varpi \cdot \psi 1^{\circ}{}_2 \\ \psi 1_3 + \varpi \cdot \psi 1^{\circ}{}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi 2_1 + \varpi \cdot \psi 2^{\circ}{}_1 \\ \psi 2_2 + \varpi \cdot \psi 2^{\circ}{}_2 \\ \psi 2_3 + \varpi \cdot \psi 2^{\circ}{}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\psi 1_1 + \psi 2_1) + \varpi \cdot (\psi 1^{\circ}{}_1 + \psi 2^{\circ}{}_1) \\ (\psi 1_2 + \psi 2_2) + \varpi \cdot (\psi 1^{\circ}{}_2 + \psi 2^{\circ}{}_2) \\ (\psi 1_3 + \psi 2_3) + \varpi \cdot (\psi 1^{\circ}{}_3 + \psi 2^{\circ}{}_3) \end{bmatrix} . \tag{3.86}$$

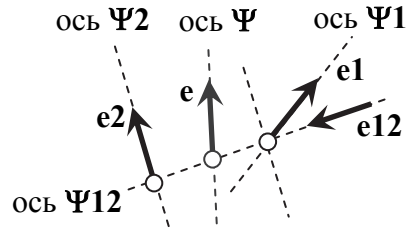


Рис. 3.4. Расположение оси суммы двух винтов

Отметим одно важное свойство оси суммарного винта **Ψ** = **Ψ1** + **Ψ2**. В работе [17] установлено, что эта ось так же, как и оси винтов **Ψ1** и **Ψ2**, пересекает под прямым углом ось винта **Ψ12** = = **Ψ1** × **Ψ2**, являющегося винтовым произведением исходных винтов. На рис. 3.4 в качестве иллюстрации показаны оси, о которых шла речь, и единичные векторы этих осей **e**, **e1**, **e2**, **e12**, соответствующие винтам **Ψ**, **Ψ1**, **Ψ2**, **Ψ12** для указания ориентации осей.

3.5. Винты в косоугольной дуальной системе координат

Целью этого раздела будет научиться измерять отдельный винт (находить для него единичный винт и модуль), находить угол и расстояние между осями двух винтов, складывать (находить сумму) и умножать винты (находить скалярное, винтовое и смешанное произведение винтов), пользуясь косоугольными дуальными координатами этих винтов.

3.5.1. Базисные винты

До сих пор для исчисления винтов, иногда не осознавая этого, мы пользовались прямоугольной декартовой системой координат, где в качестве базиса были приняты три единичных винта с нулевыми параметрами и со взаимно перпендикулярными осями, пересекающимися в одной точке. Как и в обычном векторном исчислении, в качестве базиса могут быть приняты три других линейно независимых винта (не обязательно единичных, не обязательно с перпендикулярными осями и не обязательно с осями, пересекающимися в одной точке), например, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$. Для определенности будем полагать, что эти винты заданы своими проекциями P_{ij} на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$P_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{B}_j \quad (i, j = 1,2,3), \tag{3.87}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{B}_j = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_i \cdot P_{ij} \quad (j = 1,2,3), \tag{3.88}$$

где $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ – базисные единичные винты прямоугольной декартовой координатной системы. Потребуем лишь, чтобы винты $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ так же, как и винты $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, составляли правую тройку.

Идентичность формул (3.87) и (3.88) объясняется тем в силу ортогональности базовых единичных винтов прямоугольной декартовой системы координат и с учетом пересечения осей этих винтов в одной точке

$$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \Delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,3), \tag{3.89}$$

где Δ_{ij} – дуальный символ Кронекера:

$$\Delta_{ij} = 1 + \varpi \cdot 0 \quad (i = j); \quad \Delta_{ij} = 0 + \varpi \cdot 0 \quad (i \neq j) \quad (i, j = 1,2,3). \tag{3.90}$$

3.5.2. Косоугольные координаты

Любой винт $\mathbf{\Psi}$ в базисе $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ может быть однозначно определен тремя дуальными числами, называемыми косоугольными координатами этого винта. Есть два стандартных вида этих координат, определяющих винт: ковариантные и контравариантные.

Ковариантными координатами будем называть дуальные числа, равные скалярным произведениям винта $\mathbf{\Psi}$ и базисных винтов $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$:

$$\Psi_i = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{\Psi} \quad (i = 1,2,3). \tag{3.91}$$

Номер ковариантной координаты будем обозначать нижним индексом.

Контравариантными координатами будем называть дуальные числа, при помощи которых можно представить винт $\mathbf{\Psi}$ как линейную комбинацию базисных винтов:

$$\mathbf{\Psi} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{B}_i \cdot \Psi^i \,. \tag{3.92}$$

Номер контравариантной координаты будем обозначать верхним индексом.

Заметим, что в этом разделе используются обозначения, похожие на тензорные. Поэтому надо помнить, что одни и те же буквенные обозначения, отличающиеся уровнем расположения индексов, представляют обозначения разных величин.

3.5.3. Выражение прямоугольных декартовых координат через косоугольные

Для того, чтобы вывести формулы для оперирования с винтами в косоугольной системе координат, нужно уметь выражать прямоугольные декартовы координаты винтов через косоугольные координаты, чтобы затем воспользоваться зависимостями разделов 3.3, 3.4.

Обозначим прямоугольные декартовы координаты винта $\mathbf{\Psi}$, являющиеся дуальными числами, через $\mathrm{o}\Psi_1$, $\mathrm{o}\Psi_2$, $\mathrm{o}\Psi_3$. С их помощью винт $\mathbf{\Psi}$ может быть представлен однозначно, хотя формулы для определения этих координат могут быть записаны в двух видах. Первый из них соответствует идее ковариантных координат. При этом прямоугольные декартовы координаты равны скалярным произведениям винта $\mathbf{\Psi}$ на базисные винты:

$$\mathrm{o}\Psi_i = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{\Psi} \quad (i = 1,2,3) \,. \tag{3.93}$$

Второй вид соответствует идее контравариантных координат. При этом винт $\mathbf{\Psi}$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных единичных винтов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ следующим образом:

$$\mathbf{\Psi} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{o}\Psi_i \cdot \mathbf{E}_i \,. \tag{3.94}$$

Это означает, что в прямоугольной декартовой системе ковариантные и контравариантные координаты винта совпадают.

Подставляя в формулы (3.93) зависимость (3.92), с учетом (3.88) получим формулу для перехода от контравариантных координат к прямоугольным декартовым:

$$\mathrm{o}\Psi_i = \mathbf{E}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} \mathbf{B}_j \cdot \Psi^j = \sum_{j=1}^{3} P_{ij} \cdot \Psi^j \quad (i = 1,2,3) \,. \tag{3.95}$$

Подставляя в формулу (3.91) выражение для $\mathbf{\Psi}$ из (3.94), получим:

$$\Psi_j = \mathbf{B}_j \cdot \sum_{k=1}^{3} \mathrm{o}\Psi_k \cdot \mathbf{E}_k = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{o}\Psi_k \cdot P_{kj} \quad (j = 1,2,3) \,. \tag{3.96}$$

Эта формула дает неявную зависимость между ковариантными косоугольными и прямоугольными декартовыми координатами винта $\boldsymbol{\Psi}$ посредством матрицы $\mathbf{P}$ с элементами P_{kj}. Для того, чтобы явно выразить $\mathrm{o}\Psi_k$ через Ψ_j, нужно умножить левую и правую часть равенства (3.96) справа на матрицу $\mathbf{P}^{-1}$. В результате получим формулу для перехода от ковариантных координат к прямоугольным декартовым:

$$\mathrm{o}\Psi_k = \sum_{j=1}^{3} \Psi_j \cdot P^j{}_k \quad (k = 1,2,3), \tag{3.97}$$

где $P^j{}_k$ – элементы матрицы $\mathbf{P}^{-1}$, обратной к матрице $\mathbf{P}$ с элементами P_{kj}, см. (3.87). Элементы этих матриц удовлетворяют следующим зависимостям:

$$\sum_{j=1}^{3} P_{ij} \cdot P^j{}_k = \Delta_{ik}; \quad \sum_{j=1}^{3} P^i{}_j \cdot P_{jk} = \Delta^i{}_k \quad (i,k = 1,2,3), \tag{3.98}$$

где $\Delta_{ik} = \Delta^i{}_k$ – дуальный символ Кронекера, определенный формулой (3.90).

3.5.4. Обращение матрицы с дуальными элементами

В предыдущем разделе мы столкнулись с необходимостью обратить матрицу с дуальными элементами. Обращение матрицы с дуальными элементами может выполняться по тем же алгоритмам, что и обращение матрицы с действительными элементами. Единственным отличием будет являться то, что вместо обычной арифметики надо пользоваться арифметикой дуальных чисел (см. раздел 3.1).

Выведем формулу для обращения матрицы с дуальными элементами такую, которая не использует операций с дуальными числами, а использует только операции с действительными числами. Пусть исходная матрица представлена в виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \varpi \cdot \mathbf{p}^\circ. \tag{3.99}$$

Поэлементно это выглядит так:

$$P_{ij} = p_{ij} + \varpi \cdot p^\circ{}_{ij} \quad (i,j = 1,2,3). \tag{3.100}$$

Будем искать обратную ей матрицу в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \varpi \cdot \mathbf{x}^\circ. \tag{3.101}$$

Произведение обратных матриц должно быть равно единичной дуальной матрице:

$$\mathbf{I} = \mathbf{i} + \varpi \cdot \mathbf{o}. \tag{3.102}$$

где $\mathbf{i}$ – обычная единичная матрица; $\mathbf{o}$ – нулевая матрица.

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \varpi \cdot (\mathbf{p}^\circ \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^\circ) = \mathbf{i} + \varpi \cdot \mathbf{o}. \tag{3.103}$$

Отсюда вытекают два обычных матричных равенства:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{p}^\circ \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^\circ = \mathbf{o}. \tag{3.104}$$

Из первого равенства вытекает:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}^{-1}. \tag{3.105}$$

Из второго равенства вытекает:

$$\mathbf{p}^{\circ}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^{\circ}=\mathbf{o};\quad \mathbf{x}^{\circ}=-\mathbf{p}^{-1}\cdot\mathbf{p}^{\circ}\cdot\mathbf{x}=-\mathbf{p}^{-1}\cdot\mathbf{p}^{\circ}\cdot\mathbf{p}^{-1}. \tag{3.106}$$

Таким образом, приходим к окончательной формуле:

$$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{p}^{-1}-\varpi\cdot\mathbf{p}^{-1}\cdot\mathbf{p}^{\circ}\cdot\mathbf{p}^{-1}, \tag{3.107}$$

или в поэлементной записи:

$$P^{j}{}_{m}=p^{j}{}_{m}-\varpi\cdot\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}p^{j}{}_{k}\cdot p^{\circ}{}_{kl}\cdot p^{l}{}_{m}\quad (j,m=1,2,3). \tag{3.108}$$

Смысл обозначений становится ясным при сравнении формул (3.107) и (3.108). Поэлементное представление исходной матрицы **P** дается формулой (3.100).

Разумеется, элементы $p^{j}{}_{m}$ обратной матрицы $\mathbf{p}^{-1}$ придется получить из элементов p_{kl} прямой матрицы **p** путем ее численного обращения.

3.5.5. Метрика косоугольной системы координат

При решении реальных геометрических задач возникает необходимость в определении углов, расстояний, площадей, объемов и других метрических объектов. В прямоугольной декартовой системе координат для определения этих величин используются простые очевидные формулы. В косоугольной системе координат также существуют метрические формулы. Однако они не так очевидны и зависят от выбора базовых винтов.

Как будет показано ниже, полную метрическую информацию о косоугольной системе координат содержит матрица **G** третьего порядка с дуальными элементами, которые являются попарными скалярными произведениями базисных винтов $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$:

$$G_{ij}=\mathbf{B}_i\cdot\mathbf{B}_j\quad (i,j=1,2,3). \tag{3.109}$$

Записывая эти скалярные произведения с использованием (3.88), получим формулу для численного определения дуальных элементов этой матрицы:

$$G_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}P_{ki}\cdot\mathbf{E}_k\cdot P_{lj}\cdot\mathbf{E}_l=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}P_{ki}\cdot P_{lj}\cdot\Delta_{kl}=\sum_{k=1}^{3}P_{ki}\cdot P_{kj}\quad (i,j=1,2,3). \tag{3.110}$$

Матрица **G** называется ковариантной метрической матрицей или фундаментальной матрицей базиса. В силу линейной независимости породивших ее винтов, она является невырожденной, а в силу коммутативности их скалярного умножения – симметричной.

Представляет интерес матрица алгебраических дополнений **A** элементов определителя матрицы **G**:

$$\mathbf{A}=\left[A_{jk}\right]=\begin{bmatrix}G_{22}\cdot G_{33}-G_{32}\cdot G_{23} & G_{23}\cdot G_{31}-G_{33}\cdot G_{21} & G_{21}\cdot G_{32}-G_{31}\cdot G_{22}\\ G_{32}\cdot G_{13}-G_{12}\cdot G_{33} & G_{33}\cdot G_{11}-G_{13}\cdot G_{31} & G_{31}\cdot G_{12}-G_{11}\cdot G_{32}\\ G_{12}\cdot G_{23}-G_{22}\cdot G_{13} & G_{13}\cdot G_{21}-G_{23}\cdot G_{11} & G_{11}\cdot G_{22}-G_{21}\cdot G_{12}\end{bmatrix}. \tag{3.111}$$

Используя ее, легко вычислить матрицу $\mathbf{G}^{-1}$, обратную по отношению к матрице $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^T}{|\mathbf{G}|}; \quad G^{jk} = \frac{A_{kj}}{|\mathbf{G}|} \quad (j,k = 1,2,3), \tag{3.112}$$

называемую контравариантной метрической матрицей. Элементы этой матрицы можно также получить по формуле:

$$G^{jk} = \sum_{i=1}^{3} P^j{}_i \cdot P^k{}_i \quad (j,k = 1,2,3), \tag{3.113}$$

где $P^j{}_i$ – элементы матрицы $\mathbf{P}^{-1}$, обратной к матрице $\mathbf{P}$ с элементами P_{ij}.

Обращение этой матрицы можно выполнить численно, пользуясь методикой раздела 3.5.4.

С использованием ковариантной метрической матрицы с элементами G_{ij} ковариантные координаты Ψ_j любого винта $\mathbf{\Psi}$ можно выразить через его контравариантные координаты Ψ^i, подставив выражение (3.92) в (3.91) и воспользовавшись формулой (3.109):

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^{3} \Psi^i \cdot G_{ij} \quad (j = 1,2,3). \tag{3.114}$$

Обращение зависимости (3.114) приводит к формуле:

$$\Psi^k = \sum_{j=1}^{3} \Psi_j \cdot G^{jk} \quad (k = 1,2,3). \tag{3.115}$$

Эта формула позволяет определять контравариантные координаты винта Ψ^k через его ковариантные координаты Ψ_j с использованием контравариантной метрической матрицы с элементами G^{jk}.

Смешанное произведение базисных винтов (если они составляют правую тройку) может быть получено по формуле:

$$(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \mathbf{B_3}) = |\mathbf{P}| = \sqrt{|\mathbf{G}|}. \tag{3.116}$$

Под корнем стоит определитель ковариантной метрической матрицы $\mathbf{G}$.

Справедливость этой формулы подтверждается тем, что формулу (3.110) можно записать в таком виде:

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}, \tag{3.117}$$

а детерминант произведения квадратных матриц равен произведению детерминантов сомножителей.

3.5.6. Вычисление детерминанта матрицы с дуальными элементами

В формулах, приведенных выше, иногда встречается детерминант матрицы с дуальными элементами. Этот детерминант можно вычислить пользуясь обычными алгоритмами для вычисления детерминанта, используя вместо правил обычной

арифметики правила для операций с дуальными числами. Здесь мы приведем формулы, в которых используется только арифметика действительных чисел.

Пусть требуется найти детерминант матицы с дуальными элементами:

$$\mathbf{G} = \mathbf{g} + \varpi \cdot \mathbf{g}^{\circ}; \quad G_{jk} = g_{jk} + \varpi \cdot g^{\circ}{}_{jk} \quad (j,k = 1,...,n). \tag{3.118}$$

Детерминант матрицы с дуальными элементами – это дуальное число. Для его определения воспользуемся следующим известным правилом. Детерминант суммы двух квадратных матриц **P** и **Q** одного и того же порядка *n* равен сумме всех различных детерминантов порядка *n*, которые могут получиться, если часть строк брать совпадающими с соответствующими строками матрицы **P**, а оставшуюся часть – совпадающими с соответствующими строками матрицы **Q**.

Для нашего случая с матрицей **G** будем полагать первым слагаемым матрицу **g**, а вторым слагаемым – матрицу $\varpi \cdot \mathbf{g}^{\circ}$. Будем составлять всевозможные детерминанты, выбирая часть строк из матрицы **g**, а остальные строки принимая из матрицы $\varpi \cdot \mathbf{g}^{\circ}$. Заметим, что детерминант, в котором будут присутствовать более чем одна строка из матрицы $\varpi \cdot \mathbf{g}^{\circ}$, равен нулю, поскольку $\varpi \cdot \varpi = 0$. Таким образом, детерминант матрицы **G** будет равен сумме $n + 1$ оставшихся детерминантов. Одним из них будет детерминант матрицы **g** (все строки выбраны из матрицы **g**), а остальные *n* детерминантов будут построены так, что одна строка будет выбрана из матрицы $\varpi \cdot \mathbf{g}^{\circ}$, а остальные – из матрицы **g**. Каждый из этих *n* детерминантов можно разложить по элементам единственной строки, взятой из матрицы $\varpi \cdot \mathbf{g}^{\circ}$.

Эти рассуждения позволяют записать ответ в виде следующей формулы:

$$\left|G_{jk}\right| = \left|g_{jk}\right| + \varpi \cdot \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g^{\circ}{}_{jk} \cdot a_{jk}\,, \tag{3.119}$$

где a_{jk} – алгебраическое дополнение элемента g_{jk} в детерминанте $\left|g_{jk}\right|$.

В том случае, если $\left|g_{jk}\right| \neq 0$, имеет силу следующая формула:

$$\left|G_{jk}\right| = \left|g_{jk}\right| \cdot \left(1 + \varpi \cdot \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g^{\circ}{}_{jk} \cdot g^{kj}\right), \tag{3.120}$$

где g^{kj} – элементы матрицы, обратной к **g**.

3.5.7. Взаимный базис

Существует набор из трех винтов $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$, образующий базис, взаимный по отношению к базису $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$. Винты взаимного базиса можно получить через винты исходного базиса по формулам:

$$\mathbf{B}^1 = \frac{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3}{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)}; \quad \mathbf{B}^2 = \frac{\mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_1}{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)}; \quad \mathbf{B}^3 = \frac{\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2}{(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)}. \tag{3.121}$$

Смешанное произведение $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3)$ определяется формулой (3.116).

Скалярные произведения винтов взаимных базисов удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{B}^i \cdot \mathbf{B}_j = \Delta^i{}_j \quad (i,j=1,2,3), \tag{3.122}$$

где Δ^i_j – дуальный символ Кронекера.

Винты основного и взаимного базисов связаны также и следующими зависимостями:

$$\mathbf{B}_j = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{B}^i \cdot G_{ij}; \quad \mathbf{B}^k = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{B}_j \cdot G^{jk} \quad (j,k=1,2,3). \tag{3.123}$$

В справедливости первой из этих формул можно убедиться, последовательно скалярно умножая левую и правую часть равенства на $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ и принимая в учет формулу (3.122). Вторая формула вытекает из первой.

Ковариантные координаты винта $\mathbf{\Psi}$ (3.91) являются коэффициентами, при помощи которых из винтов взаимного базиса можно получить винт $\mathbf{\Psi}$:

$$\mathbf{\Psi} = \Psi_1 \cdot \mathbf{B^1} + \Psi_2 \cdot \mathbf{B^2} + \Psi_3 \cdot \mathbf{B^3}. \tag{3.124}$$

Обратно, скалярные произведения винта $\mathbf{\Psi}$ и винтов взаимного базиса $\mathbf{B^1}$, $\mathbf{B^2}$, $\mathbf{B^3}$ равны контравариантным координатам винта $\mathbf{\Psi}$:

$$\Psi^1 = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{B^1}; \quad \Psi^2 = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{B^2}; \quad \Psi^3 = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{B^3}. \tag{3.125}$$

Попарные скалярные произведения винтов взаимного базиса $\mathbf{B^1}$, $\mathbf{B^2}$, $\mathbf{B^3}$ образуют дуальные элементы контравариантной метрической матрицы:

$$G^{ij} = \mathbf{B^i} \cdot \mathbf{B^j} \quad (i,j=1,2,3). \tag{3.126}$$

Смешанное произведение базисных винтов взаимного базиса может быть вычислено по формуле:

$$(\mathbf{B^1}, \mathbf{B^2}, \mathbf{B^3}) = \left|\mathbf{P}^{-1}\right| = \sqrt{\left|\mathbf{G}^{-1}\right|} = 1 \Big/ \sqrt{|\mathbf{G}|}. \tag{3.127}$$

3.5.8. Скалярное умножение винтов в косоугольных координатах

Скалярное произведение винтов $\mathbf{\Psi 1}$ и $\mathbf{\Psi 2}$, в прямоугольных декартовых координатах $o\Psi 1_1$, $o\Psi 1_2$, $o\Psi 1_3$, и $o\Psi 2_1$, $o\Psi 2_2$, $o\Psi 2_3$ выражается следующим образом:

$$\mathbf{\Psi 1} \cdot \mathbf{\Psi 2} = \sum_{i=1}^{3} o\Psi 1_i \cdot o\Psi 2_i. \tag{3.128}$$

Базируясь на формулах (3.95) и (3.97), с последующим использованием формул (3.110) и (3.113) можем записать:

$$\mathbf{\Psi 1} \cdot \mathbf{\Psi 2} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Psi 1_j \cdot G^{jk} \cdot \Psi 2_k = \sum_{j=1}^{3} \Psi 1_j \cdot \Psi 2^j = \sum_{k=1}^{3} \Psi 1^k \cdot \Psi 2_k = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Psi 1^k \cdot G_{kl} \cdot \Psi 2^l. \tag{3.129}$$

Здесь записаны четыре варианта выражения скалярного произведения винтов через их косоугольные координаты. В первом случае для обоих винтов использованы ковариантные координаты, во втором случае для винта $\mathbf{\Psi 1}$ использованы ковариант-

ные координаты, а для винта **Ψ2** – контравариантные, в третьем случае – наоборот, в четвертом случае для обоих винтов использованы контравариантные координаты.

3.5.9. Норма, модуль, параметр и ось винта в косоугольных координатах

Норма винта – это дуальное число, равное скалярному квадрату винта. Скалярный квадрат может быть вычислен по формуле (3.129). Для винта **Ψ** получим следующие выражения:

$$\|\boldsymbol{\Psi}\| = \boldsymbol{\Psi}^2 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Psi_j \cdot G^{jk} \cdot \Psi_k = \sum_{j=1}^{3} \Psi_j \cdot \Psi^j = \sum_{k=1}^{3} \Psi^k \cdot \Psi_k = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Psi^k \cdot G_{kl} \cdot \Psi^l . \qquad (3.130)$$

Эти формулы дают возможность вычислить норму винта, пользуясь ковариантными и контравариантными координатами Ψ_j и Ψ^j винта **Ψ**, а также метрическими матрицами с элементами G_{jk} и G^{kl} ($j, k, l = 1, 2, 3$).

Модуль винта – это дуальное число, равное корню квадратному из его нормы:

$$|\boldsymbol{\Psi}| = \sqrt{\|\boldsymbol{\Psi}\|} . \qquad (3.131)$$

Параметр винта **Ψ** через его прямоугольные декартовы координаты

$$\mathrm{o}\Psi_j = \mathrm{o}\psi_j + \varpi \cdot \mathrm{o}\psi^\circ{}_j \quad (j = 1,2,3) \qquad (3.132)$$

выражается формулой:

$$\lceil \boldsymbol{\Psi} \rceil = \frac{\mathrm{o}\psi_1 \cdot \mathrm{o}\psi^\circ{}_1 + \mathrm{o}\psi_2 \cdot \mathrm{o}\psi^\circ{}_2 + \mathrm{o}\psi_3 \cdot \mathrm{o}\psi^\circ{}_3}{\mathrm{o}\psi_1^2 + \mathrm{o}\psi_2^2 + \mathrm{o}\psi_3^2} . \qquad (3.133)$$

Параметр винта – действительное число.

Ось винта **Ψ** определяется единичным винтом **E**, который можно получить в результате нормирования рассматриваемого винта как частное от деления винта **Ψ** на его модуль |**Ψ**|:

$$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\Psi}}{|\boldsymbol{\Psi}|}; \quad E_j = \frac{\Psi_j}{|\boldsymbol{\Psi}|}; \quad E^j = \frac{\Psi^j}{|\boldsymbol{\Psi}|} \quad (j = 1,2,3) . \qquad (3.134)$$

В формуле (3.134) приведены выражения для единичного винта в винтовой и координатных формах.

3.5.10. Винтовое умножение винтов в косоугольных координатах

Формулы для винтового умножения винтов в косоугольных координатах получим, пользуясь принципом перенесения Котельникова-Штуди. В частности, винтовое произведение **Ψ** винтов **Ψ1** и **Ψ2**, определенных своими контравариантными координатами $\Psi 1^1$, $\Psi 1^2$, $\Psi 1^3$, и $\Psi 2^1$, $\Psi 2^2$, $\Psi 2^3$, пользуясь принципом перенесения, можно вычислить так:

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi 1} \times \boldsymbol{\Psi 2} = \sqrt{|\mathbf{G}|} \cdot \begin{vmatrix} \Psi 1^1 & \Psi 1^2 & \Psi 1^3 \\ \Psi 2^1 & \Psi 2^2 & \Psi 2^3 \\ \mathbf{B^1} & \mathbf{B^2} & \mathbf{B^3} \end{vmatrix} = \Psi_1 \cdot \mathbf{B^1} + \Psi_2 \cdot \mathbf{B^2} + \Psi_3 \cdot \mathbf{B^3}. \qquad (3.135)$$

Эта формула дает возможность выразить ковариантные координаты винтового произведения $\boldsymbol{\Psi}$ через контравариантные координаты сомножителей:

$$\Psi_1 = \sqrt{|\mathbf{G}|} \cdot \begin{vmatrix} \Psi 1^2 & \Psi 1^3 \\ \Psi 2^2 & \Psi 2^3 \end{vmatrix}; \quad \Psi_2 = \sqrt{|\mathbf{G}|} \cdot \begin{vmatrix} \Psi 1^3 & \Psi 1^1 \\ \Psi 2^3 & \Psi 2^1 \end{vmatrix}; \quad \Psi_3 = \sqrt{|\mathbf{G}|} \cdot \begin{vmatrix} \Psi 1^1 & \Psi 1^2 \\ \Psi 2^1 & \Psi 2^2 \end{vmatrix}. \qquad (3.136)$$

Контравариантные координаты винтового произведения $\boldsymbol{\Psi}$, зная его ковариантные координаты, можно вычислить по формуле (3.115).

Запишем следующее равенство:

$$\begin{bmatrix} \Psi 1^1 & \Psi 1^2 & \Psi 1^3 \\ \Psi 2^1 & \Psi 2^2 & \Psi 2^3 \\ \mathbf{B^1} & \mathbf{B^2} & \mathbf{B^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi 1_1 & \Psi 1_2 & \Psi 1_3 \\ \Psi 2_1 & \Psi 2_2 & \Psi 2_3 \\ \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} & \mathbf{B_3} \end{bmatrix}. \qquad (3.137)$$

Оно справедливо в силу формул (3.114) и (3.123). Для детерминантов будет справедлива следующая формула:

$$\begin{vmatrix} \Psi 1^1 & \Psi 1^2 & \Psi 1^3 \\ \Psi 2^1 & \Psi 2^2 & \Psi 2^3 \\ \mathbf{B^1} & \mathbf{B^2} & \mathbf{B^3} \end{vmatrix} \cdot |\mathbf{G}| = \begin{vmatrix} \Psi 1_1 & \Psi 1_2 & \Psi 1_3 \\ \Psi 2_1 & \Psi 2_2 & \Psi 2_3 \\ \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} & \mathbf{B_3} \end{vmatrix}. \qquad (3.138)$$

Далее несложные преобразования приведут нас к формуле:

$$\Psi^1 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{G}|}} \cdot \begin{vmatrix} \Psi 1_2 & \Psi 1_3 \\ \Psi 2_2 & \Psi 2_3 \end{vmatrix}; \quad \Psi^2 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{G}|}} \cdot \begin{vmatrix} \Psi 1_3 & \Psi 1_1 \\ \Psi 2_3 & \Psi 2_1 \end{vmatrix}; \quad \Psi^3 = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{G}|}} \cdot \begin{vmatrix} \Psi 1_1 & \Psi 1_2 \\ \Psi 2_1 & \Psi 2_2 \end{vmatrix}. \qquad (3.139)$$

Эти формулы дают возможность выразить контравариантные координаты винтового произведения $\boldsymbol{\Psi}$ через ковариантные координаты сомножителей. Ковариантные координаты винтового произведения $\boldsymbol{\Psi}$, зная его контравариантные координаты, можно вычислить по формуле (3.114).

3.5.11. Смешанное произведение винтов в косоугольных координатах

Смешанное произведение винтов $\boldsymbol{\Psi 1}$, $\boldsymbol{\Psi 2}$ и $\boldsymbol{\Psi 3}$ является дуальным числом и в прямоугольных декартовых координатах $o\Psi 1_1$, $o\Psi 1_2$, $o\Psi 1_3$, $o\Psi 2_1$, $o\Psi 2_2$, $o\Psi 2_3$ и $o\Psi 3_1$, $o\Psi 3_2$, $o\Psi 3_3$ выражается следующим образом:

$$(\boldsymbol{\Psi 1}, \boldsymbol{\Psi 2}, \boldsymbol{\Psi 3}) = \begin{vmatrix} o\Psi 1_1 & o\Psi 1_2 & o\Psi 1_3 \\ o\Psi 2_1 & o\Psi 2_2 & o\Psi 2_3 \\ o\Psi 3_1 & o\Psi 3_2 & o\Psi 3_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.140)$$

В косоугольной системе координат с базисными винтами $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ выполняется зависимость (3.95), которая в обозначениях (3.140) приводит к следующему результату:

$$(\boldsymbol{\Psi 1}, \boldsymbol{\Psi 2}, \boldsymbol{\Psi 3}) = \begin{vmatrix} o\Psi 1_1 & o\Psi 1_2 & o\Psi 1_3 \\ o\Psi 2_1 & o\Psi 2_2 & o\Psi 2_3 \\ o\Psi 3_1 & o\Psi 3_2 & o\Psi 3_3 \end{vmatrix} = \left\| \begin{bmatrix} \Psi 1^1 & \Psi 1^2 & \Psi 1^3 \\ \Psi 2^1 & \Psi 2^2 & \Psi 2^3 \\ \Psi 3^1 & \Psi 3^2 & \Psi 3^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \right|, \quad (3.141)$$

а с учетом формулы (3.116) можем окончательно записать:

$$(\boldsymbol{\Psi 1}, \boldsymbol{\Psi 2}, \boldsymbol{\Psi 3}) = \begin{vmatrix} \Psi 1^1 & \Psi 1^2 & \Psi 1^3 \\ \Psi 2^1 & \Psi 2^2 & \Psi 2^3 \\ \Psi 3^1 & \Psi 3^2 & \Psi 3^3 \end{vmatrix} \cdot \sqrt{|\mathbf{G}|}\,. \quad (3.142)$$

Эта формула позволяет по контравариантным координатам винтов $\boldsymbol{\Psi 1}$, $\boldsymbol{\Psi 2}$ и $\boldsymbol{\Psi 3}$ и детерминанту метрической матрицы $\mathbf{G}$ вычислить смешанное произведение этих винтов.

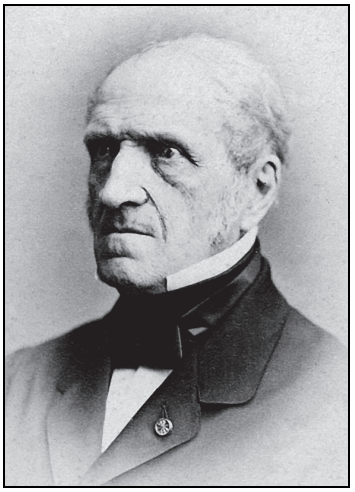
Подобным образом можно вычислить смешанное произведение тех же винтов по их ковариантным координатам:

$$(\boldsymbol{\Psi 1}, \boldsymbol{\Psi 2}, \boldsymbol{\Psi 3}) = \begin{vmatrix} \Psi 1_1 & \Psi 1_2 & \Psi 1_3 \\ \Psi 2_1 & \Psi 2_2 & \Psi 2_3 \\ \Psi 3_1 & \Psi 3_2 & \Psi 3_3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{G}|}}\,. \quad (3.143)$$

3.6. Винтовое представление положения твердого тела

3.6.1. Теорема Шаля

Видный французский геометр Мишель Шаль, изучая движение свободного тела в трехмерном пространстве, доказал важную теорему, названную впоследствии его именем. Имеются две формулировки этой теоремы [10].



Мишель Шаль (1793–1880)

Первая формулировка теоремы Шаля. Всякое перемещение свободного твердого тела из одного положения в другое может быть получено посредством поступательного перемещения тела вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота тела вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Поступательная часть перемещения зависит от выбора полюса; а вращательная часть перемещения от выбора полюса не зависит.

Вторая формулировка теоремы Шаля. Всякое перемещение свободного твердого тела может быть осуществлено одним винтовым перемещением относительно некоторой оси, называемой осью конечного винтового перемещения.

Из первой формулировки теоремы Шаля вытекает, что конечное перемещение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного перемещения, определяемого перемещением произвольно выбранного полюса, и из вращательного перемещения вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Из второй формулировки следует, что перемещение свободного твердого тела можно представить как непрерывную последовательность мгновенных винтовых перемещений.

3.6.2. Конечное перемещение твердого тела

Как и ранее, будем пользоваться двумя системами прямоугольных декартовых координат: неподвижной **X** и подвижной **Y**, жестко связанной с твердым телом. Точку твердого тела, в которой расположено начало системы координат **Y**, будем называть полюсом. Перемещением твердого тела будем называть его переход из исходного положения, в котором подвижная система координат **Y** совмещена с неподвижной системой координат **X**, в другое фиксированное положение (рис. 3.5).

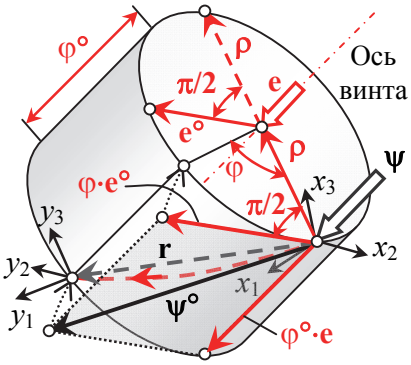


Рис. 3.5. К геометрии винта

В соответствии со второй формулировкой теоремы Шаля, произвольное перемещение свободного твердого тела в пространстве эквивалентно винтовому перемещению. Поэтому конечное перемещение тела (подвижной системы координат **Y**) относительно неподвижной системы координат **X** можно охарактеризовать при помощи винта. Наиболее просто воспользоваться винтом истинного эйлерова перемещения, получаемого путем развертывания вектора истинного эйлерова поворота по принципу перенесения Котельникова-Штуди:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^{\circ}; \quad \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ} = \Phi \cdot \mathbf{E}; \quad \Phi = \varphi + \varpi \cdot \varphi^{\circ}, \tag{3.144}$$

где **E** – единичный винт оси винтового перемещения, причем, **e** – единичный вектор, определяющий направление оси винта, **e°** – вектор момента единичного вектора **e** относительно начала координат, Φ – дуальный угол поворота тела, причем φ – обычный угол поворота тела вокруг оси винта, φ° – поступательное перемещение тела вдоль этой оси.

Геометрический смысл всех этих величин иллюстрируется рис. 3.5. На нем показаны угол φ·и расстояние φ°, векторы **e**, **e°**, φ·**e°**, φ°·**e**, **ψ**, **ψ°**, а также вектор **ρ**, характеризующий смещение оси винта относительно начала координат, и радиус-вектор линейного перемещения полюса ***r***.

Для лучшего понимания рассмотрим взаимное расположение векторов **e**, **e°**, **ρ**, связанных с винтом истинного эйлерова перемещения (рис. 3.6). Ось винта определяется единичным безразмерным вектором **e**. Момент этого вектора относительно начала координат есть вектор **e°**. Его размерность – длина. Известно, что момент скользящего вектора относительно начала координат равен векторному произведению радиус-вектора, исходящего из начала координат, и достигающего произволь-

ной точки, находящейся на линии действия скользящего вектора. Это вектор **ρ**, перпендикулярный оси винта. С учетом этого можно записать:

$$\mathbf{e}^\circ = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{e}\,. \qquad (3.145)$$

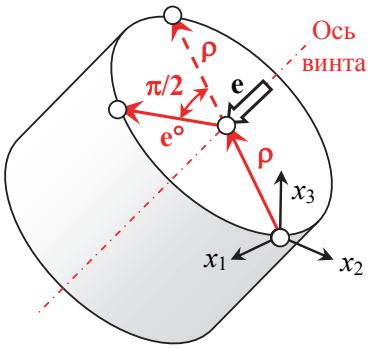


Рис. 3.6. Векторы единичного винта

Получается, что векторы **e**, **e°**, **ρ** взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку. Размерности и модули векторов **ρ** и **e°** равны между собой. Справедлива также формула:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{e} \times \mathbf{e}^\circ\,. \qquad (3.146)$$

На рисунках изображен цилиндр, коаксиальный винту и проходящий через полюс – начало неподвижной системы координат **X**. Радиус этого цилиндра равен длине вектора **ρ**. По поверхности этого цилиндра вместе с телом перемещается полюс, принадлежащий твердому телу (его траектория показана криволинейной стрелкой на рис. 3.5). Кроме цилиндра, на рис. 3.5 просматривается плоский прямоугольник, стороны которого определяются векторами $\varphi \cdot \mathbf{e}^\circ$ и $\varphi^\circ \cdot \mathbf{e}$, а диагональ – вектором $\boldsymbol{\psi}^\circ$. Плоскость этого прямоугольника касается поверхности цилиндра по линии вектора $\varphi^\circ \cdot \mathbf{e}$. Если этот прямоугольник наворачивать на поверхность цилиндра, то его диагональ совместится с криволинейной стрелкой, а конец вектора $\boldsymbol{\psi}^\circ$ укажет положение полюса твердого тела после его конечного перемещения. Это положение определяется также радиус-вектором линейного перемещения полюса ***r***. Анализируя рис. 3.6, замечаем, что вектор поступательного перемещения полюса **r** можно вычислить по формуле:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} \cdot (1 - \cos\varphi) + \mathbf{e}^\circ \cdot \sin\varphi + \mathbf{e} \cdot \varphi^\circ\,. \qquad (3.147)$$

Далее рассмотрим взаимосвязь величин, характеризующих единичный винт **E**, дуальный угол Φ и дуальный вектор **Ψ**. Если известны компоненты единичного винта **E**:

$$E_i = e_i + \varpi \cdot e^\circ_i \quad (i = 1,2,3)\,, \qquad (3.148)$$

где e_i – проекция единичного вектора винта **E** на ось X_i, e°_i – момент единичного вектора винта **E** относительно оси X_i, то компоненты винта истинного эйлерова перемещения **Ψ** могут быть представлены формулами:

$$\Psi_i = \varphi \cdot e_i + \varpi \cdot (\varphi \cdot e^\circ_i + \varphi^\circ \cdot e_i) \quad (i = 1,2,3)\,. \qquad (3.149)$$

Компоненты единичного винта **E** могут быть выражены и по-иному, в частности, через дуальные углы **Γ** единичного винта **E** с осями координатной системы X:

$$E_i = \cos\Gamma_i; \quad \Gamma_i = \gamma_i + \varpi \cdot \gamma^\circ_i; \quad \cos\Gamma_i = \cos\gamma_i - \varpi \cdot \gamma^\circ_i \cdot \sin\gamma_i \quad (i = 1,2,3)\,, \qquad (3.150)$$

где γ_i – обычный угол между осью винта и осью X_i, γ°_i – расстояние между этими осями.

С учетом этого компоненты винта истинного эйлерова перемещения $\boldsymbol{\Psi}$ могут быть представлены формулами:

$$\Psi_i = \varphi \cdot \cos\gamma_i + \varpi \cdot (\varphi^\circ \cdot \cos\gamma_i - \varphi \cdot \gamma^\circ{}_i \cdot \sin\gamma_i) \quad (i = 1,2,3). \tag{3.151}$$

По компонентам винта $\boldsymbol{\Psi}$ несложно восстановить компоненты дуального угла Φ и единичного винта **E**. Формулы перехода таковы:

$$\varphi = |\boldsymbol{\psi}| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}; \quad \varphi^\circ = \lceil \boldsymbol{\Psi} \rceil \cdot |\boldsymbol{\psi}|; \quad \lceil \boldsymbol{\Psi} \rceil = \frac{\psi_1 \cdot \psi^\circ{}_1 + \psi_2 \cdot \psi^\circ{}_2 + \psi_3 \cdot \psi^\circ{}_3}{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}; \tag{3.152}$$

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\psi}}{|\boldsymbol{\psi}|}; \quad \mathbf{e}^\circ = \frac{\boldsymbol{\psi}^\circ - \lceil \boldsymbol{\Psi} \rceil \cdot \boldsymbol{\psi}}{|\boldsymbol{\psi}|}. \tag{3.153}$$

3.6.3. Скорость перемещения твердого тела

В начале раздела 3.6 упомянут кинематический винт, который характеризует скорость движения твердого тела в самом общем случае. Этот винт можно представить в виде дуального вектора:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \varpi \cdot \boldsymbol{\omega}^\circ. \tag{3.154}$$

В этой записи $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через начало координат; $\boldsymbol{\omega}^\circ$ – вектор линейной скорости начала координат.

Тот же винт можно представить и в винтовой записи:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cdot \mathbf{E} = (\omega + \varpi \cdot \omega^\circ) \cdot (\mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^\circ). \tag{3.155}$$

В этой записи **E** – единичный винт, определяющий мгновенную ось, вокруг которой вращается твердое тело. При этом **e** – единичный вектор, определяющий направление оси, а $\mathbf{e}^\circ$ – вектор-момент единичного вектора относительно начала координат. Число Ω – дуальная угловая скорость тела. Главная часть этого дуального числа ω – угловая скорость вращения тела вокруг оси; моментная часть – ω°– скорость перемещения тела вдоль этой оси.

Раскрывая эту формулу по правилу умножения дуальных величин, получим формулы перехода от винтовой записи к записи в виде дуального вектора:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}; \quad \boldsymbol{\omega}^\circ = \omega^\circ \cdot \mathbf{e} + \omega \cdot \mathbf{e}^\circ, \tag{3.156}$$

или покомпонентно:

$$\omega_i = \omega \cdot e_i; \quad \omega^\circ{}_i = \omega^\circ \cdot e_i + \omega \cdot e^\circ{}_i \quad (i = 1,2,3). \tag{3.157}$$

Обратный переход выглядит следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}; \lceil \boldsymbol{\Omega} \rceil = \frac{\omega_1 \cdot \omega^\circ{}_1 + \omega_2 \cdot \omega^\circ{}_2 + \omega_3 \cdot \omega^\circ{}_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2};$$
$$e_i = \frac{\omega_i}{\omega}; e^\circ{}_i = \frac{\omega^\circ{}_i - \lceil \boldsymbol{\Omega} \rceil \cdot \omega_i}{\omega} (i = 1,2,3). \tag{3.158}$$

3.6.4. Силовое воздействие на твердое тело

До сих пор мы подробно рассматривали, как определяются перемещение твердого тела и его скорость в трехмерном пространстве. В этом разделе рассмотрим, как можно представить при помощи винта систему сил и моментов, действующих на тело. Известно, что силы и моменты могут быть представлены в трехмерном пространстве в виде векторов. При этом сила – скользящий вектор, а момент – свободный вектор.

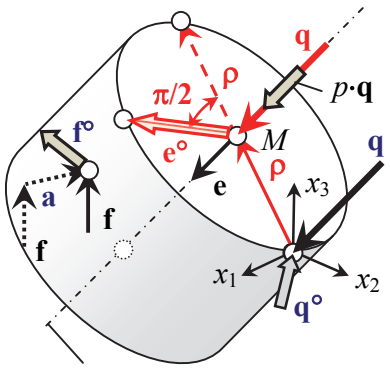


Рис. 3.7. Приведение системы сил к стандартному виду

Из статики твердого тела известно, что систему сил и моментов, действующих на тело, можно заменить другой эквивалентной системой самыми различными способами. Поскольку сосредоточенная сила представляет собой скользящий вектор, силу можно свободно передвигать вдоль линии ее действия, то есть менять точку ее приложения на этой линии, оставляя систему сил эквивалентной. Вектор момента является свободным вектором. Поэтому точку его приложения можно выбрать произвольно, оставляя систему сил эквивалентной. Еще одним приемом для получения эквивалентной системы сил является перемещение силы, назовем ее **f**, параллельно самой себе (рис. 3.7). Если при этом точка приложения силы сместилась на вектор **a**, то такое перемещение нужно компенсировать введением в систему дополнительного воздействия в виде момента, вектор которого направлен перпендикулярно векторам **f** и **a** и определяется формулой:

$$\mathbf{f}^\circ = \mathbf{f} \times \mathbf{a}\,. \tag{3.159}$$

Кроме этого, векторы моментов можно заменять их суммой. Векторы сил также можно складывать, но предварительно их надо привести к единому полюсу.

Общепринятым является представление сил и моментов, приложенных к твердому телу, в виде дуального вектора:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \varpi \cdot \mathbf{q}^\circ\,, \tag{3.160}$$

где **q** – главный вектор системы; **q°** – главный момент системы.

Для определения дуального вектора **Q** поступают так. Все силы приводятся к началу координат и векторно складываются. В результате получается главный вектор системы **q**, приложенный в начале координат. Все моменты – и возникшие от переноса сил, и приложенные к твердому телу самостоятельно – тоже векторно складываются. В результате получается главный момент системы **q°**. Систему сил и моментов, приложенных к твердому телу, можно рассматривать и как силовой винт, который называют динамой. В соответствии с формулами, приведенными в разделе 3.3.1, ось силового винта определяется единичным винтом

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \varpi \cdot \mathbf{e}^\circ; \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}; \quad \mathbf{e}^\circ = \frac{\mathbf{q}^\circ - \lceil \mathbf{Q} \rceil \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}; \quad \lceil \mathbf{Q} \rceil = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^\circ}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}. \tag{3.161}$$

Модуль главного вектора винта m и момент винта m° определяются формулами:

$$m = |\mathbf{q}|; \quad m^\circ = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^\circ}{|\mathbf{q}|}. \tag{3.162}$$

Удобно, если в исходном состоянии каждая из n элементарных нагрузок, приложенных к твердому телу, задана своими плюккеровыми координатами:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \varpi \cdot \mathbf{f}^\circ_i \quad (i = 1, ..., n), \tag{3.163}$$

где $\mathbf{f}_i$ – вектор силы с номером i; $\mathbf{f}^\circ_i$ – вектор момента этой силы относительно начала координат. Нагрузка в виде момента также вписывается в эту схему. Просто для нее вектор силы будет равным нулю.

Для получения дуального вектора динамы следует почленно сложить координаты всех приложенных нагрузок:

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i; \quad \mathbf{q}^\circ = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}^\circ_i. \tag{3.164}$$

3.6.5. Работа системы сил на бесконечно малых перемещениях тела

Пусть к твердому телу приложена система сил, описываемая силовым винтом:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \varpi \cdot \mathbf{q}^\circ, \tag{3.165}$$

а тело находится в движении, и скорость этого движения описывается кинематическим винтом $\mathbf{\Omega}$. Требуется определить работу системы сил, приложенных к твердому телу, за единицу времени, то есть их мощность.

Решение этой задачи известно [17]. Мощность всех сил, приложенных к телу, описываемых силовым винтом $\mathbf{Q}$ при движении тела со скоростью, описываемой кинематическим винтом $\mathbf{\Omega}$, равна относительному моменту этих винтов или моментной части скалярного произведения винтов $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{\Omega}$ (см. раздел 3.4.2):

$$W = \mathbf{q}^\circ \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}^\circ. \tag{3.166}$$

Покомпонентное представление этой формулы таково:

$$W = q^\circ_1 \cdot \omega_1 + q^\circ_2 \cdot \omega_2 + q^\circ_3 \cdot \omega_3 + q_1 \cdot \omega^\circ_1 + q_2 \cdot \omega^\circ_2 + q_3 \cdot \omega^\circ_3. \tag{3.167}$$

Разумеется, компоненты обоих винтов должны быть представлены в одной и той же системе координат. Относительный момент является общим инвариантом двух винтов и не зависит от выбора системы координат, в которой представлены эти винты.

Обращаем внимание на то, что приведенные здесь формулы для определения работы системы сил при движении тела справедливы только при бесконечно малых перемещениях. Поэтому здесь использовано понятие мощности. Если же требуется определить работу системы сил на конечных перемещениях тела, надо выполнить интегрирование выражения (3.166) по времени с учетом законов изменения во времени силового винта и винта скоростей.

4. Бикватернионы

4.1. Основные понятия

Родоначальником бикватернионов считают У. Клиффорда [69]. Он, разрабатывая геометрию движения, обобщил кватернионы Гамильтона, построив бикватернионы. Идеи У. Клиффорда развил видный российский ученый А. П. Котельников, посвятив бикватернионам часть своей книги по винтовому исчислению [34].

Удобнее всего определить бикватернион как кватернион, элементами которого являются дуальные числа:

$$\mathbf{Q} = \left[q_0 + \varpi \cdot q^\circ_0;\quad q_1 + \varpi \cdot q^\circ_1;\quad q_2 + \varpi \cdot q^\circ_2;\quad q_3 + \varpi \cdot q^\circ_3 \right]. \tag{4.1}$$

Бикватернион состоит из дуальной и винтовой частей [60].

Дуальной частью бикватерниона является дуальное число:

$$\mathrm{dual}\mathbf{Q} = q_0 + \varpi \cdot q^\circ_0 . \tag{4.2}$$

Винтовой частью бикватерниона является трехмерный дуальный вектор (винт):

$$\mathrm{screw}\mathbf{Q} = \left[q_1 + \varpi \cdot q^\circ_1;\quad q_2 + \varpi \cdot q^\circ_2;\quad q_3 + \varpi \cdot q^\circ_3 \right]^T . \tag{4.3}$$

Бикватернион, у которого винтовая часть равна нулю, называют чисто дуальным. Бикватернион, у которого дуальная часть равна нулю, называют чисто винтовым.

В бикватернионе можно усмотреть два обычных кватерниона:

$$\mathbf{q} = \left[q_0;\ q_1;\ q_2;\ q_3 \right];\quad \mathbf{q}^\circ = \left[q^\circ_0;\quad q^\circ_1;\quad q^\circ_2;\quad q^\circ_3 \right]. \tag{4.4}$$

Первый из них, **q**, будем называть главным кватернионом, а второй, **q°**, – моментным кватернионом. Можем условно записать:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \varpi \cdot \mathbf{q}^\circ . \tag{4.5}$$

Бикватернион характеризуется несколькими скалярными величинами:

параметром бикватерниона:

$$\lceil \mathbf{Q} \rceil = \frac{q_0 \cdot q^\circ_0 + q_1 \cdot q^\circ_1 + q_2 \cdot q^\circ_2 + q_3 \cdot q^\circ_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \tag{4.6}$$

параметром дуальной части бикватерниона:

$$\lceil \mathbf{Q} \rceil_0 = \frac{q^\circ_0}{q_0}, \tag{4.7}$$

параметром винтовой части бикватерниона:

$$\lceil \mathbf{Q} \rceil_{\bullet} = \frac{q_1 \cdot q^{\circ}{}_1 + q_2 \cdot q^{\circ}{}_2 + q_3 \cdot q^{\circ}{}_3}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \tag{4.8}$$

Соблюдаются зависимости:

$$\lceil \mathbf{Q} \rceil = \frac{\langle \mathbf{q} \rangle^2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil_{\bullet} + q_0^2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil_0}{|\mathbf{q}|^2}; \lceil \mathbf{Q} \rceil_{\bullet} = \frac{|\mathbf{q}|^2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil - q_0^2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil_0}{\langle \mathbf{q} \rangle^2}; \lceil \mathbf{Q} \rceil_0 = \frac{|\mathbf{q}|^2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil - \langle \mathbf{q} \rangle^2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil_{\bullet}}{q_0^2}. \tag{4.9}$$

На бикватернионы можно распространить понятия нормы, модуля, модуля векторной части и аргумента обычных кватернионов. Для бикватернионов они представляют собой дуальные числа.

Норма бикватерниона представляет собой дуальное число:

$$\|\mathbf{Q}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \varpi \cdot 2 \cdot (q_0 \cdot q^{\circ}{}_0 + q_1 \cdot q^{\circ}{}_1 + q_2 \cdot q^{\circ}{}_2 + q_3 \cdot q^{\circ}{}_3) = \|\mathbf{q}\| \cdot (1 + \varpi \cdot 2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil). \tag{4.10}$$

Параметр нормы бикватерниона – действительное число:

$$\lceil \|\mathbf{Q}\| \rceil = 2 \cdot \frac{q_0 \cdot q^{\circ}{}_0 + q_1 \cdot q^{\circ}{}_1 + q_2 \cdot q^{\circ}{}_2 + q_3 \cdot q^{\circ}{}_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 2 \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil. \tag{4.11}$$

Оно вдвое больше параметра бикватерниона.

Модуль бикватерниона – дуальное число:

$$|\mathbf{Q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} + \varpi \cdot \frac{q_0 \cdot q^{\circ}{}_0 + q_1 \cdot q^{\circ}{}_1 + q_2 \cdot q^{\circ}{}_2 + q_3 \cdot q^{\circ}{}_3}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = |\mathbf{q}| \cdot \left(1 + \varpi \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil\right). \tag{4.12}$$

Параметр модуля бикватерниона – действительное число:

$$\lceil |\mathbf{Q}| \rceil = \frac{q_0 \cdot q^{\circ}{}_0 + q_1 \cdot q^{\circ}{}_1 + q_2 \cdot q^{\circ}{}_2 + q_3 \cdot q^{\circ}{}_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \lceil \mathbf{Q} \rceil. \tag{4.13}$$

Параметр модуля бикватерниона совпадает с параметром самого бикватерниона.

Модуль винтовой части бикватерниона – дуальное число:

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} + \varpi \cdot \frac{q_1 \cdot q^{\circ}{}_1 + q_2 \cdot q^{\circ}{}_2 + q_3 \cdot q^{\circ}{}_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \langle \mathbf{q} \rangle \cdot \left(1 + \varpi \cdot \lceil \mathbf{Q} \rceil_{\bullet}\right). \tag{4.14}$$

Параметр модуля винтовой части бикватерниона действительное число:

$$\lceil \langle \mathbf{Q} \rangle \rceil = \frac{q_1 \cdot q^{\circ}{}_1 + q_2 \cdot q^{\circ}{}_2 + q_3 \cdot q^{\circ}{}_3}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \lceil \mathbf{Q} \rceil_{\bullet}. \tag{4.15}$$

Оно совпадает с параметром винтовой части бикватерниона.

Аргумент бикватерниона – дуальное число:

$$\arg\mathbf{Q}=\arg(q_0+i\cdot\langle\mathbf{q}\rangle)+\varpi\cdot\left[\frac{q_0\cdot q^\circ{}_0+q_1\cdot q^\circ{}_1+q_2\cdot q^\circ{}_2+q_3\cdot q^\circ{}_3}{(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)\cdot\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\cdot q_0-\frac{q^\circ{}_0}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\right]= \tag{4.16}$$

$$=\arg\mathbf{q}+\varpi\cdot\frac{q_0}{\langle\mathbf{q}\rangle}\cdot\left(\lceil\mathbf{Q}\rceil-\lceil\mathbf{Q}\rceil_0\right)=\arg\mathbf{q}+\varpi\cdot\frac{q_0}{|\mathbf{q}|}\cdot\frac{\langle\mathbf{q}\rangle}{|\mathbf{q}|}\cdot\left(\lceil\mathbf{Q}\rceil_\bullet-\lceil\mathbf{Q}\rceil_0\right)=\theta+\varpi\cdot\theta^\circ.$$

Главная часть аргумента бикватерниона θ называется поворотом бикватерниона, а моментная часть θ° – шагом бикватерниона.

Параметр аргумента бикватерниона определяется по формуле:

$$\lceil\arg\mathbf{Q}\rceil=\frac{q_0}{\langle\mathbf{q}\rangle\cdot\arg\mathbf{q}}\cdot\left(\lceil\mathbf{Q}\rceil-\lceil\mathbf{Q}\rceil_0\right). \tag{4.17}$$

4.2. Операции над бикватернионами

1. Бикватернионное сопряжение, которое мы будем обозначать чертой над идентификатором, определяется следующим образом:

$$\bar{\mathbf{Q}}=\left[(q_0+\varpi\cdot q^\circ{}_0);\quad -(q_1+\varpi\cdot q^\circ{}_1);\quad -(q_2+\varpi\cdot q^\circ{}_2);\quad -(q_3+\varpi\cdot q^\circ{}_3)\right]. \tag{4.18}$$

В результате бикватернионного сопряжения получается бикватернион.

2. Сложение и вычитание бикватернионов выполняется почленно:

$$\mathbf{P}\pm\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}(p_0\pm q_0)+\varpi\cdot(p^\circ{}_0\pm q^\circ{}_0)\\(p_1\pm q_1)+\varpi\cdot(p^\circ{}_1\pm q^\circ{}_1)\\(p_2\pm q_2)+\varpi\cdot(p^\circ{}_2\pm q^\circ{}_2)\\(p_3\pm q_3)+\varpi\cdot(p^\circ{}_3\pm q^\circ{}_3)\end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

В результате получается бикватернион. Сложение бикватернионов коммутативно.

Нейтральным по сложению и вычитанию есть нулевой бикватернион:

$$\mathbf{O}=\left[0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0\right]. \tag{4.20}$$

Сложение и вычитание этого бикватерниона не изменяет результат суммирования.

Сложение и вычитание коммутирует с сопряжением:

$$\overline{\mathbf{P}\pm\mathbf{Q}}=\bar{\mathbf{P}}\pm\bar{\mathbf{Q}}. \tag{4.21}$$

3. Умножение действительного числа на бикватернион и бикватерниона на действительное число выполняется естественным образом:

$$a\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\cdot a=\left[a\cdot q_0+\varpi\cdot a\cdot q^\circ{}_0;\ a\cdot q_1+\varpi\cdot a\cdot q^\circ{}_1;\ a\cdot q_2+\varpi\cdot a\cdot q^\circ{}_2;\ a\cdot q_3+\varpi\cdot a\cdot q^\circ{}_3\right]. \tag{4.22}$$

В результате умножения числа на бикватернион или бикватерниона на число получается бикватернион. Операция коммутативна.

4. Умножение дуального числа на бикватернион и бикватерниона на дуальное число выражается формулой:

$$\left(a+\varpi\cdot a^{\circ}\right)\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\cdot\left(a+\varpi\cdot a^{\circ}\right)=\begin{bmatrix} a\cdot q_0+\varpi\cdot(a\cdot q^{\circ}_0+a^{\circ}\cdot q_0)\\ a\cdot q_1+\varpi\cdot(a\cdot q^{\circ}_1+a^{\circ}\cdot q_1)\\ a\cdot q_2+\varpi\cdot(a\cdot q^{\circ}_2+a^{\circ}\cdot q_2)\\ a\cdot q_3+\varpi\cdot(a\cdot q^{\circ}_3+a^{\circ}\cdot q_3)\end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

В результате умножения дуального числа на бикватернион или бикватерниона на дуальное число получается бикватернион. Операция коммутативна.

5. Умножение бикватерниона на бикватернион обозначается знаком ∘ и выполняется по правилам умножения кватернионов (2.18) с учетом того, что их элементами являются дуальные числа. Формулу умножения бикватернионов можно записать компактно с использованием составляющих главных и моментных кватернионов:

$$\mathbf{R}=\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}=\mathbf{p}\circ\mathbf{q}+\varpi\cdot(\mathbf{p}\circ\mathbf{q}^{\circ}+\mathbf{p}^{\circ}\circ\mathbf{q}). \tag{4.24}$$

Ниже эта формула расписана покомпонентно:

$$\begin{aligned}
&r_0=p_0\cdot q_0-p_1\cdot q_1-p_2\cdot q_2-p_3\cdot q_3;\\
&r_1=p_1\cdot q_0+p_0\cdot q_1-p_3\cdot q_2+p_2\cdot q_3;\\
&r_2=p_2\cdot q_0+p_3\cdot q_1+p_0\cdot q_2-p_1\cdot q_3;\\
&r_3=p_3\cdot q_0-p_2\cdot q_1+p_1\cdot q_2+p_0\cdot q_3;\\
&r^{\circ}_0=p^{\circ}_0\cdot q_0-p^{\circ}_1\cdot q_1-p^{\circ}_2\cdot q_2-p^{\circ}_3\cdot q_3+p_0\cdot q^{\circ}_0-p_1\cdot q^{\circ}_1-p_2\cdot q^{\circ}_2-p_3\cdot q^{\circ}_3;\\
&r^{\circ}_1=p^{\circ}_1\cdot q_0+p^{\circ}_0\cdot q_1-p^{\circ}_3\cdot q_2+p^{\circ}_2\cdot q_3+p_1\cdot q^{\circ}_0+p_0\cdot q^{\circ}_1-p_3\cdot q^{\circ}_2+p_2\cdot q^{\circ}_3;\\
&r^{\circ}_2=p^{\circ}_2\cdot q_0+p^{\circ}_3\cdot q_1+p^{\circ}_0\cdot q_2-p^{\circ}_1\cdot q_3+p_2\cdot q^{\circ}_0+p_3\cdot q^{\circ}_1+p_0\cdot q^{\circ}_2-p_1\cdot q^{\circ}_3;\\
&r^{\circ}_3=p^{\circ}_3\cdot q_0-p^{\circ}_2\cdot q_1+p^{\circ}_1\cdot q_2+p^{\circ}_0\cdot q_3+p_3\cdot q^{\circ}_0-p_2\cdot q^{\circ}_1+p_1\cdot q^{\circ}_2+p_0\cdot q^{\circ}_3.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

В результате бикватернионного умножения получается бикватернион. Бикватернионное умножение некоммутативно, т. е. его результат в общем случае зависит от порядка сомножителей.

Условия коммутативности умножения бикватернионов выглядят так:

$$\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\circ\mathbf{P}=\mathbf{p}\circ\mathbf{q}-\mathbf{q}\circ\mathbf{p}+\varpi\cdot(\mathbf{p}\circ\mathbf{q}^{\circ}-\mathbf{q}\circ\mathbf{p}^{\circ}+\mathbf{p}^{\circ}\circ\mathbf{q}-\mathbf{q}^{\circ}\circ\mathbf{p})=\mathbf{O}, \tag{4.26}$$

или в покомпонентной записи (после деления на 2):

$$\begin{bmatrix} p_2\cdot q_3-q_2\cdot p_3\\ p_3\cdot q_1-q_3\cdot p_1\\ p_1\cdot q_2-q_1\cdot p_2\end{bmatrix}+\varpi\cdot\begin{bmatrix} p_2\cdot q^{\circ}_3-q_2\cdot p^{\circ}_3+p^{\circ}_2\cdot q_3-q^{\circ}_2\cdot p_3\\ p_3\cdot q^{\circ}_1-q_3\cdot p^{\circ}_1+p^{\circ}_3\cdot q_1-q^{\circ}_3\cdot p_1\\ p_1\cdot q^{\circ}_2-q_1\cdot p^{\circ}_2+p^{\circ}_1\cdot q_2-q^{\circ}_1\cdot p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\varpi\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

Сравнивая эту запись с формулой (3.74), приходим к выводу, что условие коммутативности бикватернионов при умножении эквивалентно равенству нулю винтового произведения винтов этих бикватернионов. Это означает, что винты этих бикватернионов должны быть коаксиальны, то есть оси винтов должны совпадать. Дуальные части бикватернионов-сомножителей могут быть любыми.

Рассмотрим некоторые свойства бикватернионного умножения.

Умножение бикватернионов ассоциативно:

$$\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}=(\mathbf{P}\circ\mathbf{Q})\circ\mathbf{R}=\mathbf{P}\circ(\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}). \tag{4.28}$$

Умножение бикватернионов дистрибутивно по отношению к суммированию и вычитанию:

$$\mathbf{P}\circ(\mathbf{Q}\pm\mathbf{R})=\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\pm\mathbf{P}\circ\mathbf{R};\quad(\mathbf{P}\pm\mathbf{Q})\circ\mathbf{R}=\mathbf{P}\circ\mathbf{R}\pm\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}. \tag{4.29}$$

Дуальная часть произведения бикватернионов не изменяется при циклической перестановке сомножителей:

$$\operatorname{dual}(\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\circ\mathbf{R})=\operatorname{dual}(\mathbf{R}\circ\mathbf{P}\circ\mathbf{Q})=\operatorname{dual}(\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}\circ\mathbf{P}). \tag{4.30}$$

В частности, дуальная часть произведения двух бикватернионов не зависит от порядка сомножителей:

$$\operatorname{dual}(\mathbf{P}\circ\mathbf{Q})=\operatorname{dual}(\mathbf{Q}\circ\mathbf{P}). \tag{4.31}$$

Сопряженное значение от произведения двух бикватернионов равно произведению их сопряженных значений, взятых в обратном порядке:

$$\overline{\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}}=\overline{\mathbf{Q}}\circ\overline{\mathbf{P}}. \tag{4.32}$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\overline{\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}\circ\mathbf{S}}=\overline{\mathbf{S}}\circ\overline{\mathbf{R}}\circ\overline{\mathbf{Q}}\circ\overline{\mathbf{P}}. \tag{4.33}$$

Норма произведения двух бикватернионов равна произведению норм сомножителей:

$$\|\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\|=\|\mathbf{P}\|\cdot\|\mathbf{Q}\|. \tag{4.34}$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\|\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}\circ\mathbf{S}\|=\|\mathbf{P}\|\cdot\|\mathbf{Q}\|\cdot\|\mathbf{R}\|\cdot\|\mathbf{S}\|. \tag{4.35}$$

Модуль произведения двух бикватернионов равен произведению модулей сомножителей:

$$|\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}|=|\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{Q}|. \tag{4.36}$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$|\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}\circ\mathbf{S}|=|\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{Q}|\cdot|\mathbf{R}|\cdot|\mathbf{S}|. \tag{4.37}$$

При этом следует помнить, что норма и модуль бикватерниона являются не действительными, а дуальными числами. Параметр произведения двух бикватернионов равен сумме параметров сомножителей:

$$\lceil\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\rceil=\lceil\mathbf{P}\rceil+\lceil\mathbf{Q}\rceil. \tag{4.38}$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\lceil\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\circ\mathbf{R}\circ\mathbf{S}\rceil=\lceil\mathbf{P}\rceil+\lceil\mathbf{Q}\rceil+\lceil\mathbf{R}\rceil+\lceil\mathbf{S}\rceil. \tag{4.39}$$

Нейтральным по умножению является тождественный бикватернион:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1+\varpi\cdot 0 \\ 0+\varpi\cdot 0 \\ 0+\varpi\cdot 0 \\ 0+\varpi\cdot 0 \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

Умножение произвольного бикватерниона на тождественный хоть справа, хоть слева, не изменяет исходный кватернион:

$$\mathbf{I}\circ\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\circ\mathbf{I} = \mathbf{Q}. \tag{4.41}$$

Умножение бикватерниона на сопряженный выражается формулой:

$$\mathbf{Q}\circ\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}\circ\mathbf{Q} = \left[\|\mathbf{Q}\|, 0, 0, 0\right] = \|\mathbf{Q}\|\cdot\mathbf{I}. \tag{4.42}$$

6. Вынесение за скобки главного кватерниона.

Если главный кватернион **q** рассматриваемого бикватерниона **Q** = **q** + ϖ·**q**° не является нулевым, возможно представление этого бикватерниона в любом из двух следующих видов:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \varpi\cdot{}^*\mathbf{q})\circ\mathbf{q} = \mathbf{q}\circ(\mathbf{I} + \varpi\cdot\mathbf{q}^*), \tag{4.43}$$

где, естественно,

$${}^*\mathbf{q} = \mathbf{q}^\circ\circ\mathbf{q}^{-1};\quad \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{q}^\circ. \tag{4.44}$$

Это дает возможность пользоваться вместо моментного кватерниона **q**° кватернионами ***q** или **q***, имеющими в ряде случаев более привычный геометрический смысл. Будем называть кватернион ***q** левой моментной мультипликативной частью, а кватернион **q*** – правой моментной мультипликативной частью бикватерниона **Q**. Левая и правая моментные мультипликативные части одного и того же бикватерниона связаны формулами:

$${}^*\mathbf{q} = \mathbf{q}\circ\mathbf{q}^*\circ\mathbf{q}^{-1};\quad \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^{-1}\circ{}^*\mathbf{q}\circ\mathbf{q}. \tag{4.45}$$

Рассмотрим, как можно вычислить моментную мультипликативную часть произведения двух бикватернионов. Пусть

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\circ\mathbf{R};\quad \mathbf{p} + \varpi\cdot\mathbf{p}^\circ = (\mathbf{q} + \varpi\cdot\mathbf{q}^\circ)\circ(\mathbf{r} + \varpi\cdot\mathbf{r}^\circ). \tag{4.46}$$

Учитывая равенства (4.44), можно записать:

$${}^*\mathbf{p} = \mathbf{r}^* + \mathbf{r}^{-1}\circ\mathbf{q}^*\circ\mathbf{r};\quad \mathbf{p}^* = \mathbf{q}\circ{}^*\mathbf{r}\circ\mathbf{q}^{-1} + {}^*\mathbf{q}. \tag{4.47}$$

Полагая $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}$, получим формулы для левой и правой моментных мультипликативных частей обратного бикватерниона:

$$(\mathbf{q}^{-1})^* = -\mathbf{q}\circ\mathbf{q}^*\circ\mathbf{q}^{-1} = -{}^*\mathbf{q};\quad {}^*(\mathbf{q}^{-1}) = -\mathbf{q}^{-1}\circ{}^*\mathbf{q}\circ\mathbf{q} = -\mathbf{q}^*. \tag{4.48}$$

4.2.1. Представление бикватернионов с явным указанием оси винтовой части

Подобно тому, как в разделе 2.4.1 было описано представление кватерниона с явным указанием направления его векторной части, выполним здесь представление бикватерниона с явным указанием оси его винтовой части. Для идентификации оси используем единичный винт **E**, как это было сделано в разделе 3.3.1. Тогда бикватернион с осью, определяемой единичным винтом **E**, можно представить в таком виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} \cdot Q_0 + \mathbf{E} \cdot Q_\bullet . \tag{4.49}$$

Здесь использованы тождественный бикватернион **I**, чисто винтовой бикватернион **E**, и два дуальных числа Q_0 и $Q_\bullet$:

$$\mathbf{I} = [1;0;0;0];\ \mathbf{E} = [0; e_1 + \varpi \cdot e^\circ_1; e_2 + \varpi \cdot e^\circ_2; e_3 + \varpi \cdot e^\circ_3];\ Q_0 = q_0 + \varpi \cdot q^\circ_0;\ Q_\bullet = q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ_\bullet , \tag{4.50}$$

где e_1, e_2, e_3, e°_1, e°_2, e°_3 – плюккеровы координаты единичного скользящего вектора, определяющего направленную ось винтовой части бикватерниона, причем:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1; \quad e_1 \cdot e^\circ_1 + e_2 \cdot e^\circ_2 + e_3 \cdot e^\circ_3 = 0 . \tag{4.51}$$

Через эти величины можно представить бикватернион **Q** в развернутом виде:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ E_1 \cdot Q_\bullet \\ E_2 \cdot Q_\bullet \\ E_3 \cdot Q_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 + \varpi \cdot q^\circ_0 \\ (e_1 + \varpi \cdot e^\circ_1) \cdot (q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ_\bullet) \\ (e_2 + \varpi \cdot e^\circ_2) \cdot (q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ_\bullet) \\ (e_3 + \varpi \cdot e^\circ_3) \cdot (q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ_\bullet) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 + \varpi \cdot q^\circ_0 \\ e_1 \cdot q_\bullet + \varpi \cdot (e^\circ_1 \cdot q_\bullet + e_1 \cdot q^\circ_\bullet) \\ e_2 \cdot q_\bullet + \varpi \cdot (e^\circ_2 \cdot q_\bullet + e_2 \cdot q^\circ_\bullet) \\ e_3 \cdot q_\bullet + \varpi \cdot (e^\circ_3 \cdot q_\bullet + e_3 \cdot q^\circ_\bullet) \end{bmatrix} . \tag{4.52}$$

Обратное преобразование выглядит так:

$$q_\bullet = \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2};\ q^\circ_\bullet = \frac{q_1 \cdot q^\circ_1 + q_2 \cdot q^\circ_2 + q_3 \cdot q^\circ_3}{q_\bullet};\ e_i = \frac{q_i}{q_\bullet};\ e^\circ_i = \frac{q^\circ_i - q^\circ_\bullet \cdot e_i}{q_\bullet} (i = 1,2,3) . \tag{4.53}$$

Заметим, что обратное преобразование выполняется неоднозначно. В формулах (4.53) перед корнем квадратным может быть выбран знак "плюс" или знак "минус". Геометрически это означает, что направление оси винтовой части бикватерниона можно выбирать по своему усмотрению.

Такое представление бикватерниона полезно при построении его функций и выводе формул дифференцирования бикватернионов.

4.3. Аналитические функции бикватерниона

Как уже было упомянуто выше, аналитической функцией действительной переменной называют такую функцию, которую можно представить суммой числового степенного ряда (ряда Тейлора) в окрестности любой точки определения этой функции. При вычислении суммы степенного ряда используются только операции сложения и умножения чисел. Такие же операции определены и для кватернионов, что дает возможность получить аналитическую кватернионную функцию как сумму соответствующего ряда. Как уже было установлено в разделе 2.4.2, у кватернионной

функции, полученной таким путем, направление векторной части совпадает с направлением векторной части кватерниона-аргумента.

На основании принципа перенесения Котельникова-Штуди таким же образом можно строить аналитические бикватернионные функции. При этом у бикватерниона-функции сохраняется та же ось винтовой части, что и у бикватерниона-аргумента. Расчетные формулы упрощаются, если кватернион-аргумент и кватернион-функция с самого начала представлены с явным указанием оси винтовой части бикватерниона.

Пусть бикватернион-аргумент **Q** и бикватернион-функция **F** представлены с явным указанием оси винтовой части, определяемой одним и тем же единичным винтом **E**:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} \cdot Q_0 + \mathbf{E} \cdot Q_\bullet; \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} \cdot F_0 + \mathbf{E} \cdot F_\bullet . \tag{4.54}$$

Как видно из этих формул, каждый из бикватернионов, имеющих общую ось, определяется двумя дуальными числами. При этом функциональная зависимость бикватерниона **F** от бикватерниона **Q** может быть выражена следующим образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{I} \cdot F_0(Q_0, Q_\bullet) + \mathbf{E} \cdot F_\bullet(Q_0, Q_\bullet) . \tag{4.55}$$

Функции $F_0(Q_0, Q_\bullet)$ и $F_\bullet(Q_0, Q_\bullet)$ не могут быть произвольными, поскольку **F**(**Q**) должна быть функцией аналитической. Подобная проблема была решена в разделе 2.4.2 при установлении аналитических функций кватернионов с привлечением теории функций комплексной переменной. С учетом принципа перенесения Котельникова-Штуди требование аналитичности **F**(**Q**) эквивалентно выполнению равенства:

$$\mathbf{F}(Q_0 + i \cdot Q_\bullet) = F_0(Q_0, Q_\bullet) + i \cdot F_\bullet(Q_0, Q_\bullet) , \tag{4.56}$$

где **F** – рассматриваемая аналитическая функция, безотносительно к виду аргумента, например, exp, sin, cos; i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Смысл формулы (4.56) можно выразить более конструктивно следующим образом:

$$F_0(Q_0, Q_\bullet) = \mathrm{Re}\,\mathbf{F}(Q_0 + i \cdot Q_\bullet); \quad F_\bullet(Q_0, Q_\bullet) = \mathrm{Im}\,\mathbf{F}(Q_0 + i \cdot Q_\bullet) , \tag{4.57}$$

где Re – действительная часть комплексного числа;
Im – мнимая часть комплексного числа.

Формулы (4.57) указывают метод определения функций $F_0(Q_0, Q_\bullet)$ и $F_\bullet(Q_0, Q_\bullet)$ для заданной аналитической функции **F**.

Пользование этой процедурой не столь очевидно. Проделаем ее в качестве примера для квадратной функции:

$$\mathbf{F}(Q_0 + i \cdot Q_\bullet) = (Q_0 + i \cdot Q_\bullet)^2 . \tag{4.58}$$

Раскроем эту функциональную зависимость и отделим действительную и мнимую части:

$$(Q_0 + i \cdot Q_\bullet)^2 = (Q_0^2 - Q_\bullet^2) + i \cdot 2 \cdot Q_0 \cdot Q_\bullet . \tag{4.59}$$

Полученный результат истолковывается так:

$$F_0(Q_0, Q_\bullet) = Q_0^2 - Q_\bullet^2; \quad F_\bullet(Q_0, Q_\bullet) = 2 \cdot Q_0 \cdot Q_\bullet . \tag{4.60}$$

Эта формула позволяет записать выражение для квадрата бикватерниона:

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} Q_0 \\ E_1 \cdot Q_\bullet \\ E_2 \cdot Q_\bullet \\ E_3 \cdot Q_\bullet \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} Q_0^2 - Q_\bullet^2 \\ 2 \cdot E_1 \cdot Q_0 \cdot Q_\bullet \\ 2 \cdot E_2 \cdot Q_0 \cdot Q_\bullet \\ 2 \cdot E_3 \cdot Q_0 \cdot Q_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0)^2 - (q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet)^2 \\ 2 \cdot (e_1 + \varpi \cdot e^\circ{}_1) \cdot (q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0) \cdot (q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet) \\ 2 \cdot (e_2 + \varpi \cdot e^\circ{}_2) \cdot (q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0) \cdot (q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet) \\ 2 \cdot (e_3 + \varpi \cdot e^\circ{}_3) \cdot (q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0) \cdot (q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet) \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Выполним аналогичную процедуру для функции синуса:

$$\mathbf{F}(Q_0 + i \cdot Q_\bullet) = \sin(Q_0 + i \cdot Q_\bullet) = \sin Q_0 \cdot \mathrm{ch} Q_\bullet + i \cdot \cos Q_0 \cdot \mathrm{sh} Q_\bullet, \quad (4.62)$$

откуда следует:

$$F_0(Q_0, Q_\bullet) = \sin Q_0 \cdot \mathrm{ch} Q_\bullet; \quad F_\bullet(Q_0, Q_\bullet) = \cos Q_0 \cdot \mathrm{sh} Q_\bullet. \quad (4.63)$$

Выражение для синуса бикватерниона следующее:

$$\sin \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sin Q_0 \cdot \mathrm{ch} Q_\bullet \\ E_1 \cdot \cos Q_0 \cdot \mathrm{sh} Q_\bullet \\ E_2 \cdot \cos Q_0 \cdot \mathrm{sh} Q_\bullet \\ E_3 \cdot \cos Q_0 \cdot \mathrm{sh} Q_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0) \cdot \mathrm{ch}(q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet) \\ (e_1 + \varpi \cdot e^\circ{}_1) \cdot \cos(q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0) \cdot \mathrm{sh}(q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet) \\ (e_2 + \varpi \cdot e^\circ{}_2) \cdot \cos(q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0) \cdot \mathrm{sh}(q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet) \\ (e_3 + \varpi \cdot e^\circ{}_3) \cdot \cos(q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0) \cdot \mathrm{sh}(q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet) \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Более подробно эту зависимость можно записать так:

$$\sin \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (\sin q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0 \cdot \cos q_0) \cdot (\mathrm{ch} q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet \cdot \mathrm{sh} q_\bullet) \\ (e_1 + \varpi \cdot e^\circ{}_1) \cdot (\cos q_0 - \varpi \cdot q^\circ{}_0 \cdot \sin q_0) \cdot (\mathrm{sh} q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet \cdot \mathrm{ch} q_\bullet) \\ (e_2 + \varpi \cdot e^\circ{}_2) \cdot (\cos q_0 - \varpi \cdot q^\circ{}_0 \cdot \sin q_0) \cdot (\mathrm{sh} q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet \cdot \mathrm{ch} q_\bullet) \\ (e_3 + \varpi \cdot e^\circ{}_3) \cdot (\cos q_0 - \varpi \cdot q^\circ{}_0 \cdot \sin q_0) \cdot (\mathrm{sh} q_\bullet + \varpi \cdot q^\circ{}_\bullet \cdot \mathrm{ch} q_\bullet) \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Достаточно компактный метод построения аналитических функций бикватерниона продемонстрирован выше. В соответствии с этим методом аналитическая функция представляется так же, как и аргумент (4.52), а именно:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + \varpi \cdot f^\circ{}_0 \\ f_1 + \varpi \cdot f^\circ{}_1 \\ f_2 + \varpi \cdot f^\circ{}_2 \\ f_3 + \varpi \cdot f^\circ{}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ E_1 \cdot F_\bullet \\ E_2 \cdot F_\bullet \\ E_3 \cdot F_\bullet \end{bmatrix} = \mathbf{f} + \varpi \cdot \mathbf{f}^\circ = \begin{bmatrix} f_0 \\ e_1 \cdot f_\bullet \\ e_2 \cdot f_\bullet \\ e_3 \cdot f_\bullet \end{bmatrix} + \varpi \cdot \begin{bmatrix} f^\circ{}_0 \\ e^\circ{}_1 \cdot f_\bullet + e_1 \cdot f^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_2 \cdot f_\bullet + e_2 \cdot f^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_3 \cdot f_\bullet + e_3 \cdot f^\circ{}_\bullet \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

где E_j (j = 1, 2, 3) – дуальные компоненты единичного винта, определяющего ось бикватернионов **Q** и **F**; e_j, e°_j (j = 1, 2, 3) – субкомпоненты этого винта:

$$E_j = e_j + \varpi \cdot e^\circ_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad (4.67)$$

F_0 и $F_\bullet$ – дуальные числа, вычисляемые по формулам (4.57) в зависимости от рассматриваемой функции; $f_0, f^\circ_0, f_\bullet, f^\circ_\bullet$ – компоненты этих чисел:

$$F_0 = f_0 + \varpi \cdot f^\circ{}_0; \quad F_\bullet = f_\bullet + \varpi \cdot f^\circ{}_\bullet. \tag{4.68}$$

Формулы для вычисления параметров f_0, $f^\circ{}_0$, $f_\bullet$, $f^\circ{}_\bullet$ для наиболее употребительных аналитических функций приведены в приложении 9.5.

Возможен и другой подход к построению аналитических функций бикватерниона, основанный на знании одноименной функции для кватерниона. Обозначим эту кватернионную функцию **f**. Это означает, что известны функции:

$$f_j = f_j(q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (j = 0, 1, 2, 3). \tag{4.69}$$

Тогда на основании общих соображений [34, 60] можно записать:

$$F_j = f_j + \varpi \cdot \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial f_j(q_0, q_1, q_2, q_3)}{\partial q_k} \cdot q^\circ{}_k. \tag{4.70}$$

Принимая во внимание результаты раздела 2.5.5, приходим к формуле:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varpi \cdot \mathbf{f}^\circ = \mathbf{f} + \varpi \cdot \left[\mathbf{d} \circ \mathbf{qc}^\circ + T \cdot \mathbf{qn}^\circ\right], \tag{4.71}$$

где **F** – бикватернион-функция бикватерниона-аргумента **Q**, например, exp, sin, cos;

d – кватернион-функция, производная по отношению к функции **f**, соответственно, exp, cos, – sin;

Q – бикватернион-аргумент;

q и **q**° – главный и моментный кватернионы бикватерниона-аргумента;

f и **f**° – главный и моментный кватернионы бикватерниона-функции;

qc° и **qn**° – коллинеарная и нормальная составляющие кватерниона **q**° относительно кватерниона **q**;

T – действительное число, определяемое в разделе 2.5 и приложении 9.2.

Более детально используемые величины расшифрованы в формулах:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0 \\ q_1 + \varpi \cdot q^\circ{}_1 \\ q_2 + \varpi \cdot q^\circ{}_2 \\ q_3 + \varpi \cdot q^\circ{}_3 \end{bmatrix}; \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \mathbf{q}^\circ = \begin{bmatrix} q^\circ{}_0 \\ q^\circ{}_1 \\ q^\circ{}_2 \\ q^\circ{}_3 \end{bmatrix}; \mathbf{qc}^\circ = \begin{bmatrix} q^\circ{}_0 \\ P \cdot q_1 \\ P \cdot q_2 \\ P \cdot q_3 \end{bmatrix}; \mathbf{qn}^\circ = \mathbf{q}^\circ - \mathbf{qc}^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ q^\circ{}_1 - P \cdot q_1 \\ q^\circ{}_2 - P \cdot q_2 \\ q^\circ{}_3 - P \cdot q_3 \end{bmatrix}, \tag{4.72}$$

где параметр $P = \lceil \mathbf{Q} \rceil_\bullet$ определяется по формуле (4.8). Из этой формулы и из формул (4.53) следует:

$$P = \frac{q^\circ{}_\bullet}{q_\bullet}; \quad P \cdot q_j = q^\circ{}_j \cdot e_j; \quad q^\circ{}_j - P \cdot q_j = e^\circ{}_j \cdot q_\bullet \quad (j = 1, 2, 3). \tag{4.73}$$

С учетом этого формула (4.71) принимает вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varpi \cdot \mathbf{f}^\circ = \begin{bmatrix} f_0 \\ e_1 \cdot f_\bullet \\ e_2 \cdot f_\bullet \\ e_3 \cdot f_\bullet \end{bmatrix} + \varpi \cdot \left\{ \begin{bmatrix} d_0 \\ e_1 \cdot d_\bullet \\ e_2 \cdot d_\bullet \\ e_3 \cdot d_\bullet \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} q^\circ{}_0 \\ e_1 \cdot q^\circ{}_\bullet \\ e_2 \cdot q^\circ{}_\bullet \\ e_3 \cdot q^\circ{}_\bullet \end{bmatrix} + f_\bullet \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ e^\circ{}_1 \\ e^\circ{}_2 \\ e^\circ{}_3 \end{bmatrix} \right\}. \tag{4.74}$$

Таким образом, получена другая формула, по которой можно вычислить компоненты бикватернионной аналитической функции бикватернионного аргумента. В качестве исходных данных используются параметры $f_0, f_\bullet, d_0, d_\bullet$. Параметры $f_0, f_\bullet$ для различных аналитических функций содержатся в приложении 9.1, параметры $d_0, d_\bullet$ – в приложении 9.2.

4.4. Разложение бикватерниона по заданной оси

Рассмотрим произвольный бикватернион **A** и произвольную ось в трехмерном пространстве, заданную единичным винтом **E** с дуальными компонентами $E_1 = e_1 + \varpi \cdot e^\circ_1$; $E_2 = e_2 + \varpi \cdot e^\circ_2$; $E_3 = e_3 + \varpi \cdot e^\circ_3$. Разумеется,

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1; \quad e_1 \cdot e^\circ_1 + e_2 \cdot e^\circ_2 + e_3 \cdot e^\circ_3 = 0 . \tag{4.75}$$

Бикватернион **A** можно представить в виде суммы двух кватернионов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Ac} + \mathbf{An} , \tag{4.76}$$

первый из которых коаксиален заданной оси и выражается формулой

$$\mathbf{Ac} = \left[A_0, E_1 \cdot A_\otimes, E_2 \cdot A_\otimes, E_3 \cdot A_\otimes \right], \tag{4.77}$$

где

$$A_\otimes = E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3 , \tag{4.78}$$

а второй (чисто винтовой) нормален ему:

$$\mathbf{An} = \mathbf{A} - \mathbf{Ac} . \tag{4.79}$$

Можно использовать также легко проверяемые бикватернионные формулы:

$$\mathbf{Ac} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{E} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{E}}{2}; \quad \mathbf{An} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{E} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{E}}{2} . \tag{4.80}$$

4.5. Производные дуальных функций бикватерниона

Будем рассматривать такие дуальные функции бикватернионного аргумента **Q**: dual(**Q**) – дуальная часть бикватерниона; $\|\mathbf{Q}\|$ – норма бикватерниона; $|\mathbf{Q}|$ – модуль бикватерниона; $\langle \mathbf{Q} \rangle$ – модуль винтовой части бикватерниона. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что все эти функции являются аналитическими.

Во многих задачах возникает необходимость дифференцировать дуальную функцию бикватернионного аргумента по бикватерниону (точнее, по компонентам бикватерниона). Результат такого дифференцирования может быть представлен в форме бикватерниона. Если $F(\mathbf{Q}) = F(Q_0; Q_1; Q_2; Q_3)$ – дуальная функция бикватернионного аргумента **Q**, то производную от этой функции по аргументу **Q** будем полагать бикватернионом со следующими компонентами:

$$\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} = \left[\frac{\partial F(Q_0;Q_1;Q_2;Q_3)}{\partial Q_0}; \frac{\partial F(Q_0;Q_1;Q_2;Q_3)}{\partial Q_1}; \frac{\partial F(Q_0;Q_1;Q_2;Q_3)}{\partial Q_2}; \frac{\partial F(Q_0;Q_1;Q_2;Q_3)}{\partial Q_3} \right]. \tag{4.81}$$

При таком представлении полный дифференциал дуальной функции бикватерниона можно вычислять по формуле:

$$\mathrm{d}F(\mathbf{Q}) = \mathrm{dual}\left(\frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \circ \overline{\mathbf{dQ}}\right), \tag{4.82}$$

где $\mathbf{dQ} = \mathbf{dq} + \varpi \cdot \mathbf{dq}^\circ$ – дифференциал бикватерниона.

Опуская выкладки, приведем формулы для производных перечисленных выше дуальных функций бикватерниона.

1. Производная от дуальной части бикватерниона:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \mathrm{dual}(\mathbf{Q}) = \mathbf{I}, \tag{4.83}$$

где $\mathbf{I}$ – тождественный бикватернион.

2. Производная от нормы бикватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \|\mathbf{Q}\| = 2 \cdot \mathbf{Q}. \tag{4.84}$$

3. Производная от модуля бикватерниона:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} |\mathbf{Q}| = \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|}. \tag{4.85}$$

4. Производная от модуля винтовой части:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \langle \mathbf{Q} \rangle = \frac{\mathbf{Q} - \overline{\mathbf{Q}}}{2 \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle}. \tag{4.86}$$

Производная от дуальной части произведения кватернионов:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \mathrm{dual}(\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}) = \overline{\mathbf{P}}; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \mathrm{dual}(\mathbf{P} \circ \overline{\mathbf{Q}}) = \mathbf{P}. \tag{4.87}$$

4.6. Определение производного бикватерниона по моментной части

Пусть $F(\mathbf{Q}) = f(\mathbf{q}) + \varpi \cdot f^\circ(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\circ)$ – дуальная аналитическая функция бикватернионного аргумента $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \varpi \cdot \mathbf{q}^\circ$. Покажем, что производную этой функции можно определить, зная лишь моментную часть функции $\mathrm{mom}\, F(\mathbf{Q}) = f^\circ(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\circ)$.

Известно, что производную дуальной аналитической функции дуального аргумента можно определить по моментной части этой функции. Действительно, из формулы (3.12) следует, что производную дуальной аналитической функции $F = f + \varpi \cdot g$ дуального аргумента $A = a + \varpi \cdot a^\circ$ можно получить по формуле:

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \frac{\partial f}{\partial a} + \varpi \cdot \frac{\partial g}{\partial a}. \tag{4.88}$$

Из условия аналитичности (3.13) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial a^\circ}. \tag{4.89}$$

Поэтому будет справедливой формула, использующая лишь моментную часть функции

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \frac{\partial g}{\partial a^\circ} + \varpi \cdot \frac{\partial g}{\partial a}, \tag{4.90}$$

которая легко трансформируется в формулу для бикватернионного аргумента:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial f^\circ}{\partial \mathbf{q}^\circ} + \varpi \cdot \frac{\partial f^\circ}{\partial \mathbf{q}}. \tag{4.91}$$

Проверим работу этой формулы на примере нормы бикватерниона (4.84):

$$\|\mathbf{Q}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 2 \cdot \varpi \cdot (q_0 \cdot q^\circ{}_0 + q_1 \cdot q^\circ{}_1 + q_2 \cdot q^\circ{}_2 + q_3 \cdot q^\circ{}_3). \tag{4.92}$$

Моментная часть нормы бикватерниона:

$$\operatorname{mom}\|\mathbf{Q}\| = 2 \cdot (q_0 \cdot q^\circ{}_0 + q_1 \cdot q^\circ{}_1 + q_2 \cdot q^\circ{}_2 + q_3 \cdot q^\circ{}_3). \tag{4.93}$$

Дифференцирование по формуле (4.91) приводит к верному результату:

$$\frac{\partial \|\mathbf{Q}\|}{\partial \mathbf{Q}} = 2 \cdot \left[q_0 + \varpi \cdot q^\circ{}_0;\quad q_1 + \varpi \cdot q^\circ{}_1;\quad q_2 + \varpi \cdot q^\circ{}_2;\quad q_3 + \varpi \cdot q^\circ{}_3\right] = 2 \cdot \mathbf{Q}. \tag{4.94}$$

4.7. Бикватернионное представление положения твердого тела

Основное предназначение дуальных бикватернионов – это математическая формулировка и решение задач механики недеформируемого твердого тела в трехмерном пространстве. Бикватернионы помогают определять и складывать перемещения тела, выполнять преобразование координат, описывать скорость движения тела, приводить к стандартному виду систему сил, действующих на тело. Часть этих задач решается при помощи винтов. В разделе 3.6 описаны винт истинного эйлерова перемещения твердого тела, определяющий перемещение или положение твердого тела в пространстве, кинематический винт, определяющий скорость движения твердого тела, и силовой винт, представляющий любое силовое воздействие на твердое тело в виде винта. Эти же задачи решаются и при помощи бикватернионов, причем, каждому упомянутому выше винту соответствует чисто винтовой бикватернион с нулевой дуальной частью, построенный на основе этого винта.

Существенный прогресс в решении задач механики недеформируемого твердого тела в трехмерном пространстве связан с собственным бикватернионом конечного перемещения, являющимся экспоненциальной функцией бикватерниона истинного эйлерова перемещения твердого тела. Собственный бикватернион в изящной форме позволяет складывать конечные перемещения твердого тела и выполнять преобразование координат при переходе от неподвижной (базовой) системы к подвижной

(связанной) системе и наоборот. Проблемам, которые могут быть разрешены при помощи этого бикватерниона, посвящен этот раздел.

4.7.1. Собственный нормированный бикватернион конечного перемещения

В соответствии со второй формулировкой теоремы Шаля (см. раздел 3.6.1) всякое конечное перемещение свободного твердого тела может быть осуществлено одним винтовым перемещением, то есть поворотом тела на некоторый угол относительно оси, называемой осью конечного винтового перемещения, и одновременным поступательным перемещением тела вдоль этой оси.

Как было показано в разделе 3.6.2, конечное перемещение свободного твердого тела может быть представлено винтом истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}$ или одноименным чисто винтовым бикватернионом. Он может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{\Psi} = \Phi \cdot \mathbf{E}; \quad \Phi = \varphi + \varpi \cdot \varphi^{\circ}, \tag{4.95}$$

где $\mathbf{E}$ – единичный винт оси винтового перемещения, Φ – дуальный угол поворота тела, причем φ – обычный угол поворота тела вокруг оси винта, φ° – поступательное перемещение тела вдоль этой оси. На основании принципа перенесения Котельникова-Штуди общую формулу для собственного нормированного бикватерниона конечного перемещения можно представить следующим образом:

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \mathbf{I} \cdot \cos\frac{\Phi}{2} + \mathbf{E} \cdot \sin\frac{\Phi}{2}, \tag{4.96}$$

где $\mathbf{I}$ – тождественный бикватернион; $\mathbf{E}$ и Φ – те же, что и в формуле (4.95).

$$\mathbf{I} = [1; 0; 0; 0]; \quad \mathbf{E} = [0; e_1 + \varpi \cdot e^{\circ}_1; e_2 + \varpi \cdot e^{\circ}_2; e_3 + \varpi \cdot e^{\circ}_3], \tag{4.97}$$

где e_1, e_2, e_3, e°_1, e°_2, e°_3 – плюккеровы координаты единичного вектора оси винтового перемещения. Покомпонентно бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ выражается так:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2}; \quad \lambda_i = e_i \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \quad (i = 1,2,3); \tag{4.98}$$

$$\lambda^{\circ}_0 = -\frac{\varphi^{\circ}}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}; \quad \lambda^{\circ}_i = e_i \cdot \frac{\varphi^{\circ}}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} + e^{\circ}_i \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \quad (i = 1,2,3). \tag{4.99}$$

Компоненты λ_i (i = 0, 1, 2, 3) главной части $\boldsymbol{\lambda}$ бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ характеризуют конечный поворот твердого тела, а компоненты λ°_i (i = 0, 1, 2, 3) его моментной части – поступательное перемещение тела.

Приведем значения некоторых скалярных констант, характеризующих этот бикватернион:

$$|\mathbf{\Lambda}| = 1; \quad \lceil \mathbf{\Lambda} \rceil = 0; \quad \lceil \mathbf{\Lambda} \rceil_0 = -\frac{\varphi^{\circ}}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; \quad \lceil \mathbf{\Lambda} \rceil_{\bullet} = \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}. \tag{4.100}$$

Собственный бикватернион играет важную роль в преобразовании координат геометрических объектов при переходе от неподвижной системы координат **X** к подвижной системе координат **Y** (связанной с телом) и наоборот, а также при сложении перемещений свободного твердого тела.

Собственный нормированный бикватернион конечного перемещения равен половинному экспоненциальному бикватерниону от чисто винтового бикватерниона (винта) истинного эйлерова перемещения (3.144):

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \exp \frac{\mathbf{\Psi}}{2}. \tag{4.101}$$

Обращаясь к формулам (9.86) и (9.87), и учитывая то, что в соответствии с формулой (3.149) соблюдаются следующие соотношения:

$$\psi_0 = 0;\ \psi^{\circ}{}_0 = 0;\ \psi_i = \varphi \cdot e_i;\ \psi^{\circ}{}_i = \varphi \cdot e^{\circ}{}_i + \varphi^{\circ} \cdot e_i;\ \psi_{\bullet} = \varphi \quad (i = 1,2,3), \tag{4.102}$$

после подстановки получим:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[\cos\frac{\varphi}{2};\ e_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2};\ e_2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2};\ e_3 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \right]; \tag{4.103}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \left[-\frac{\varphi^{\circ}}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2};\ e^{\circ}{}_1 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} + e_1 \cdot \frac{\varphi^{\circ}}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2};\ e^{\circ}{}_2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} + e_2 \cdot \frac{\varphi^{\circ}}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2};\ e^{\circ}{}_3 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} + e_3 \cdot \frac{\varphi^{\circ}}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \right]. \tag{4.104}$$

Эти данные полностью соответствуют формулам (4.98) и (4.99), что подтверждает справедливость формулы (4.101).

4.7.2. Определение компонентов собственного нормированного бикватерниона по данным о перемещении твердого тела

Формулы (4.98) и (4.99) позволяют построить собственный кватернион, если перемещение задано единичным винтом, углом поворота твердого тела и смещением тела вдоль оси винта. Рассмотрим, как можно вычислить компоненты этого бикватерниона, если перемещение твердого тела задано иначе.

1. Пусть направление оси определяется так же, как и в предыдущем случае, координатами единичного вектора e_1, e_2, e_3, а положение ее в пространстве – координатами точки, лежащей на оси:

$$\boldsymbol{\rho} = \left[0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \right]. \tag{4.105}$$

Здесь и далее векторы записываются как кватернионы, с тем, чтобы можно было применять к ним кватернионные операции.

В этом случае $e^{o}{}_1$, $e^{o}{}_2$, $e^{o}{}_3$ можно определить так:

$$e^{\circ}{}_1 = e_3 \cdot \rho_2 - e_2 \cdot \rho_3;\quad e^{\circ}{}_2 = e_1 \cdot \rho_3 - e_3 \cdot \rho_1;\quad e^{\circ}{}_3 = e_2 \cdot \rho_1 - e_1 \cdot \rho_2 \tag{4.106}$$

и с учетом этого, взамен (4.99), получить формулу:

$$\boldsymbol{\lambda}^\circ = \begin{bmatrix} -\dfrac{\varphi^\circ}{2}\cdot\sin\dfrac{\varphi}{2} \\ \dfrac{\varphi^\circ}{2}\cdot e_1\cdot\cos\dfrac{\varphi}{2}+(e_3\cdot\rho_2-e_2\cdot\rho_3)\cdot\sin\dfrac{\varphi}{2} \\ \dfrac{\varphi^\circ}{2}\cdot e_2\cdot\cos\dfrac{\varphi}{2}+(e_1\cdot\rho_3-e_3\cdot\rho_1)\cdot\sin\dfrac{\varphi}{2} \\ \dfrac{\varphi^\circ}{2}\cdot e_3\cdot\cos\dfrac{\varphi}{2}+(e_2\cdot\rho_1-e_1\cdot\rho_2)\cdot\sin\dfrac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \tag{4.107}$$

2. Пусть ось винта задана дуальными углами, которые она образует с осями неподвижной системы координат:

$$\Gamma_i = \gamma_i + \varpi\cdot\gamma^\circ_i \quad (i=1,2,3), \tag{4.108}$$

где γ_i – угол между осью винта и i-й осью координатной системы; γ°_i – расстояние между осью винта и i-й осью координатной системы (см. раздел 3.6.2).

В этом случае компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^\circ$ определяются формулами:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2};\quad \lambda_i = \cos\gamma_i\cdot\sin\frac{\varphi}{2} \quad (i=1,2,3); \tag{4.109}$$

$$\lambda^\circ_0 = -\frac{\varphi^\circ}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2};\quad \lambda^\circ_i = \frac{\varphi^\circ}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\gamma_i - \gamma^\circ_i\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\gamma_i \quad (i=1,2,3). \tag{4.110}$$

3. В соответствии с первой формулировкой теоремы Шаля (см. раздел 3.6.1) всякое конечное перемещение свободного твердого тела может быть получено в результате поступательного перемещения тела вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота тела вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Полагаем, что полюс находится в начале системы координат **Y**, и в начальный момент твердое тело расположено так, что координатные системы **X** и **Y** совпадают, а затем тело смещают и поворачивают, после чего координатная система **Y** занимает свое окончательное положение.

В работе [60] показано, что бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}$ может быть представлен в виде:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \varpi\cdot\boldsymbol{\lambda}^\circ = \boldsymbol{\lambda}\circ(\mathbf{i} + \varpi\cdot\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\lambda}^\circ) = \boldsymbol{\lambda}\circ\left(\mathbf{i} + \varpi\cdot\frac{{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}}{2}\right) = \boldsymbol{\lambda}\circ\exp\left(\varpi\cdot\frac{{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}}{2}\right) \tag{4.111}$$

или в виде:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \varpi\cdot\boldsymbol{\lambda}^\circ = (\mathbf{i} + \varpi\cdot\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}})\circ\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{i} + \varpi\cdot\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}}{2}\right)\circ\boldsymbol{\lambda} = \exp\left(\varpi\cdot\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}}{2}\right)\circ\boldsymbol{\lambda}, \tag{4.112}$$

где $\mathbf{i}$ – тождественный кватернион; ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$ – компоненты радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала системы координат **X** в начало системы координат **Y**, представленные в системах координат **Y** и **X**.

Это дает возможность построить собственный нормированный бикватернион конечного винтового перемещения $\mathbf{\Lambda}$, если это перемещение задано компонентами вектора истинного эйлерова поворота

$$\boldsymbol{\psi} = \left[0, \psi_1, \psi_2, \psi_3\right] \tag{4.113}$$

и компонентами вектора смещения в неподвижной системе координат

$$_{\mathrm{x}}\mathbf{r} = \left[0, {}_{\mathrm{x}}r_1, {}_{\mathrm{x}}r_2, {}_{\mathrm{x}}r_3\right]. \tag{4.114}$$

Заметим, что в этом случае справедлива формула:

$$\mathbf{\Lambda} = \exp\frac{\boldsymbol{\psi} + \varpi\cdot\boldsymbol{\psi}^{\circ}}{2} = \exp\left(\varpi\cdot\frac{{}_{\mathrm{x}}\mathbf{r}}{2}\right)\circ\exp\frac{\boldsymbol{\psi}}{2}, \tag{4.115}$$

а компоненты собственного нормированного бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ выражаются формулами:

$$\lambda_0 = \cos\frac{\psi_{\bullet}}{2}; \quad \lambda_j = \frac{\psi_j}{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle}\cdot\sin\frac{\psi_{\bullet}}{2} \quad (j = 1,2,3); \tag{4.116}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \frac{{}_{\mathrm{x}}\mathbf{r}\circ\boldsymbol{\lambda}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} -\dfrac{\psi_1\cdot{}_{\mathrm{x}}r_1 + \psi_2\cdot{}_{\mathrm{x}}r_2 + \psi_3\cdot{}_{\mathrm{x}}r_3}{\langle\boldsymbol{\psi}\rangle}\cdot\sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \\ {}_{\mathrm{x}}r_1\cdot\cos\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} + \dfrac{\psi_3\cdot{}_{\mathrm{x}}r_2 - \psi_2\cdot{}_{\mathrm{x}}r_3}{\psi_{\bullet}}\cdot\sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \\ {}_{\mathrm{x}}r_2\cdot\cos\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} + \dfrac{\psi_1\cdot{}_{\mathrm{x}}r_3 - \psi_3\cdot{}_{\mathrm{x}}r_1}{\psi_{\bullet}}\cdot\sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \\ {}_{\mathrm{x}}r_3\cdot\cos\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} + \dfrac{\psi_2\cdot{}_{\mathrm{x}}r_1 - \psi_1\cdot{}_{\mathrm{x}}r_2}{\psi_{\bullet}}\cdot\sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \end{bmatrix}, \tag{4.117}$$

где

$$\psi_{\bullet} = \pm\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}\ . \tag{4.118}$$

Для этого бикватерниона

$$\left|\mathbf{\Lambda}\right| = 1; \quad \left\lceil\mathbf{\Lambda}\right\rceil = 0; \quad \left\lceil\mathbf{\Lambda}\right\rceil_{\bullet} = \frac{\psi_1\cdot{}_{\mathrm{x}}r_1 + \psi_2\cdot{}_{\mathrm{x}}r_2 + \psi_3\cdot{}_{\mathrm{x}}r_3}{2\cdot\psi_{\bullet}}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\psi_{\bullet}}{2}. \tag{4.119}$$

Если же вектор смещения задается в уже повернутой координатной системе $\mathbf{Y}$, то справедливой будет формула:

$$\mathbf{\Lambda} = \exp\frac{\boldsymbol{\psi} + \varpi\cdot\boldsymbol{\psi}^{\circ}}{2} = \exp\frac{\boldsymbol{\psi}}{2}\circ\exp\left(\varpi\cdot\frac{{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{r}}{2}\right), \tag{4.120}$$

а формулы для моментной части собственного бикватерниона будут таковы:

$$\boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\dfrac{\psi_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_1 + \psi_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_2 + \psi_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_3}{\psi_{\bullet}} \cdot \sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \\ {}_{\mathbf{Y}}r_1 \cdot \cos\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} - \dfrac{\psi_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_2 - \psi_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_3}{\psi_{\bullet}} \cdot \sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \\ {}_{\mathbf{Y}}r_2 \cdot \cos\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} - \dfrac{\psi_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_3 - \psi_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_1}{\psi_{\bullet}} \cdot \sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \\ {}_{\mathbf{Y}}r_3 \cdot \cos\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} - \dfrac{\psi_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_1 - \psi_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_2}{\psi_{\bullet}} \cdot \sin\dfrac{\psi_{\bullet}}{2} \end{bmatrix}. \tag{4.121}$$

В этом случае

$$\left|\boldsymbol{\Lambda}\right| = 1; \quad \lceil \boldsymbol{\Lambda} \rceil = 0; \quad \lceil \boldsymbol{\Lambda} \rceil_{\bullet} = \frac{\psi_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_1 + \psi_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_2 + \psi_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_3}{2 \cdot \psi_{\bullet}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\psi_{\bullet}}{2}. \tag{4.122}$$

4.7.3. Определение данных о перемещении твердого тела через компоненты собственного бикватерниона

Рассмотрим, как выражаются параметры винта конечного перемещения: плюккеровы координаты оси винта e_1, e_2, e_3, e°_1, e°_2, e°_3, угол поворота твердого тела φ и линейное перемещение тела вдоль оси винта φ° через компоненты собственного бикватерниона, представленного в виде (4.96). Воспользовавшись формулами (4.16) для аргумента кватерниона, в данном случае получим:

$$\operatorname{Arg}\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{Arg}\boldsymbol{\lambda} - \varpi \cdot \frac{\lambda^{\circ}_0}{\lambda_{\bullet}} = \frac{\Phi}{2} = \frac{\varphi + \varpi \cdot \varphi^{\circ}}{2}, \tag{4.123}$$

откуда следует:

$$\varphi = 2 \cdot \operatorname{Arg}\boldsymbol{\lambda} = 2 \cdot \arccos\lambda_0 + 4 \cdot \pi \cdot n; \quad \varphi^{\circ} = -2 \cdot \frac{\lambda^{\circ}_0}{\lambda_{\bullet}}, \tag{4.124}$$

где n – любое целое число.

Плюккеровы координаты оси винта выражаются формулами:

$$e_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{\bullet}}; \quad e^{\circ}_i = \frac{\lambda^{\circ}_i}{\lambda_{\bullet}} + \frac{\lambda_0}{\lambda_{\bullet}} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_{\bullet}} \cdot \frac{\lambda^{\circ}_0}{\lambda_{\bullet}} \quad (i = 1,2,3). \tag{4.125}$$

Для получения других данных, характеризующих перемещение твердого тела, рассмотрим несколько форм представления информации о собственном нормированном бикватернионе этого перемещения.

В первую очередь, отметим две формы, уже использованные нами, которые представлены формулами (4.111) и (4.112). Учитывая формулы (2.236) и (2.238), связывающие кватернион (вектор) истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\psi} = [0, \psi_1, \psi_2, \psi_3]$ с его половинным экспоненциальным кватернионом, эти формулы можно записать так:

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \exp\left(\frac{\boldsymbol{\psi}}{2}\right) \circ \exp\left(\varpi \cdot \frac{{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}}{2}\right); \quad \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\circ} = \exp\left(\varpi \cdot \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}}{2}\right) \circ \exp\left(\frac{\boldsymbol{\psi}}{2}\right). \quad (4.126)$$

Напомним, что в этих формулах ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$ – отображения радиуса-вектора **r**, проведенного из начала системы координат **X** в начало системы координат **Y**, в базисах **Y** и **X** соответственно.

Формулы (4.126) связывают два известных кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ и $\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$ (ведь бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ задан) с двумя искомыми кватернионами $\boldsymbol{\psi}$ и **r**. Формулы для их определения таковы:

$$\boldsymbol{\psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\,\boldsymbol{\lambda}; \quad {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r} = 2 \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^{\circ}; \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r} = 2 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}. \quad (4.127)$$

Логарифм кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ можно вычислить по формулам (9.13), которые применительно к нашему случаю приобретают следующий вид:

$$\mathrm{Ln}\,\boldsymbol{\lambda} = \left[\ln|\boldsymbol{\lambda}|, \frac{\lambda_1}{\lambda_{\bullet}} \cdot \theta, \frac{\lambda_2}{\lambda_{\bullet}} \cdot \theta, \frac{\lambda_3}{\lambda_{\bullet}} \cdot \theta\right]; \quad \theta = \arg(\lambda_0 + i \cdot \lambda_{\bullet}) + 2 \cdot \pi \cdot n, \quad (4.128)$$

где i – мнимая единица; n – произвольное целое число.

Из этого следует, что угол, на который надо повернуть тело, чтобы переместить его из начального в конечное положение, определяется неоднозначно. И это естественно, поскольку поворот тела на угол $2\cdot\pi$ вокруг фиксированной оси не изменяет положения тела. Дуальная часть кватерниона $\mathrm{Ln}|\boldsymbol{\lambda}|$ будет равной нулю, поскольку модуль главной части нормированного бикватерниона равен единице.

Для вектора смещения **r** развернутые формулы вытекают из правила умножения кватернионов и имеют следующий вид:

$${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_0 + \lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_1 + \lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_2 + \lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_3 \\ -\lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_0 + \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_1 + \lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_2 - \lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_3 \\ -\lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_0 - \lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_1 + \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_2 + \lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_3 \\ -\lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_0 + \lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_1 - \lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_2 + \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_3 \end{bmatrix}; \; {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_0 + \lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_1 + \lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_2 + \lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_3 \\ -\lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_0 + \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_1 - \lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_2 + \lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_3 \\ -\lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_0 + \lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_1 + \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_2 - \lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_3 \\ -\lambda_3 \cdot \lambda^{\circ}_0 - \lambda_2 \cdot \lambda^{\circ}_1 + \lambda_1 \cdot \lambda^{\circ}_2 + \lambda_0 \cdot \lambda^{\circ}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.129)$$

Скалярная часть кватернионов для **r** будет равной нулю, поскольку инвариант нормированного бикватерниона равен нулю.

Другая форма представления собственного бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ при помощи удвоенного его логарифма приводит к винту истинного эйлерова перемещения:

$$\mathbf{\Psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\,\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\psi} + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ}. \quad (4.130)$$

Представим бикватернион $\mathbf{\Psi}$ в следующем виде:

$$\mathbf{\Psi} = (\mathbf{i} + \varpi \cdot {}^*\boldsymbol{\psi}) \circ \boldsymbol{\psi}; \quad {}^*\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^{\circ} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1}. \quad (4.131)$$

Тогда кватернион ${}^*\boldsymbol{\psi}$ будет выглядеть покомпонентно следующим образом:

$$*\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{\psi_{\bullet}^{2}} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 \cdot \psi^{\circ}{}_1 + \psi_2 \cdot \psi^{\circ}{}_2 + \psi_3 \cdot \psi^{\circ}{}_3 \\ \psi_2 \cdot \psi^{\circ}{}_3 - \psi_3 \cdot \psi^{\circ}{}_2 \\ \psi_3 \cdot \psi^{\circ}{}_1 - \psi_1 \cdot \psi^{\circ}{}_3 \\ \psi_1 \cdot \psi^{\circ}{}_2 - \psi_2 \cdot \psi^{\circ}{}_1 \end{bmatrix}. \qquad (4.132)$$

Геометрический смысл этой формулы становится понятным, если обратиться к формулам (3.25) и (3.29). Тогда формулу (4.132) можно записать в таких обозначениях:

$$*\boldsymbol{\psi} = \left[\left\lceil \boldsymbol{\Psi} \right\rceil_{\bullet}; \quad \rho_1; \quad \rho_2; \quad \rho_3 \right], \qquad (4.133)$$

то есть, скалярная часть кватерниона $*\boldsymbol{\psi}$ представляет собой параметр винта, а векторная часть – компоненты радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$ точки, лежащей на оси винта. При этом радиус-вектор перпендикулярен оси винта. Ось винта и угол поворота определяются главным кватернионом $\boldsymbol{\psi}$.

4.7.4. Сложение конечных перемещений

По аналогии с правилами сложения конечных поворотов, изложенными в разделе 2.8.4, дуальные бикватернионы позволяют сформулировать правила для сложения конечных перемещений.

Пусть твердое тело осуществило конечное перемещение, которому соответствует собственный нормированный бикватернион $\boldsymbol{\Lambda 1}$, а затем конечное перемещение, которому соответствует собственный нормированный бикватернион $\boldsymbol{\Lambda 2}$. Если компоненты этих бикватернионов заданы в одной и той же системе координат (для определенности, в неподвижной системе **X**), то, в соответствии с принципом перенесения Котельникова-Штуди, собственный нормированный бикватернион, соответствующий результирующему перемещению, может быть получен по формуле:

$$_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda 2} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda 1}. \qquad (4.134)$$

Компоненты результирующего бикватерниона будут получены в той же системе координат. Доказательство справедливости приведенного правила можно найти в работе [60].

Это правило по индукции распространяется на любое число последовательно выполненных перемещений.

$$_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda n} \circ \ldots \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda 2} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda 1}. \qquad (4.135)$$

Заметим, что сомножители в этой формуле следуют в порядке справа налево.

Иногда бывает удобно представлять бикватернионы в подвижной системе координат. В этом случае вместо формулы (4.135) следует пользоваться формулой:

$$_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda} = {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\Lambda 1} \circ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\Lambda 2} \circ \ldots \circ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\Lambda n}. \qquad (4.136)$$

Можно чередовать перемещения, представленные то в неподвижной, то в подвижной системе координат. В этом случае, по аналогии с правилом для сложения поворотов, составление выражения для результирующего перемещения надо делать,

приписывая каждый последующий бикватернион слева от уже составленного выражения, если он представлен в неподвижной системе координат, и справа от выражения, если он представлен в подвижной системе координат. Например, если последовательно выполняются перемещения ${}_{Y}\mathbf{\Lambda 1}$, ${}_{Y}\mathbf{\Lambda 2}$, ${}_{X}\mathbf{\Lambda 3}$, ${}_{Y}\mathbf{\Lambda 4}$, ${}_{X}\mathbf{\Lambda 5}$, ${}_{X}\mathbf{\Lambda 6}$, правильным будет выражение:

$$ {}_{X}\mathbf{\Lambda} = {}_{X}\mathbf{\Lambda 6} \circ {}_{X}\mathbf{\Lambda 5} \circ {}_{X}\mathbf{\Lambda 3} \circ {}_{Y}\mathbf{\Lambda 1} \circ {}_{Y}\mathbf{\Lambda 2} \circ {}_{Y}\mathbf{\Lambda 4}. \qquad (4.137) $$

Если результат должен быть представлен в подвижной системе координат, бикватернионы составляющих перемещений располагаются в обратном порядке:

$$ {}_{Y}\mathbf{\Lambda} = {}_{X}\mathbf{\Lambda 1} \circ {}_{X}\mathbf{\Lambda 2} \circ \ldots \circ {}_{X}\mathbf{\Lambda n}; \qquad (4.138) $$

$$ {}_{Y}\mathbf{\Lambda} = {}_{Y}\mathbf{\Lambda n} \circ \ldots \circ {}_{Y}\mathbf{\Lambda 2} \circ {}_{Y}\mathbf{\Lambda 1}. \qquad (4.139) $$

Приведенные зависимости можно расписать и в кватернионах. Для примера, распишем формулу (4.134) через главные и моментные кватернионы:

$$ {}_{X}\mathbf{\Lambda} = {}_{X}\boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}; \quad {}_{X}\boldsymbol{\lambda} = {}_{X}\mathbf{\lambda 2} \circ {}_{X}\mathbf{\lambda 1}; \quad {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} = {}_{X}\mathbf{\lambda 2} \circ {}_{X}\mathbf{\lambda 1}^{\circ} + {}_{X}\mathbf{\lambda 2}^{\circ} \circ {}_{X}\mathbf{\lambda 1}. \qquad (4.140) $$

Учитывая то, что на основании формулы (4.101) собственный нормированный бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ связан с чисто винтовым бикватернионом истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}$ соотношениями:

$$ \mathbf{\Lambda} = \exp\frac{\mathbf{\Psi}}{2}; \quad \mathbf{\Psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\,\mathbf{\Lambda}, \qquad (4.141) $$

сумма $\mathbf{\Psi}$ двух последовательно выполненных истинных эйлеровых перемещений $\mathbf{\Psi 1}$ и $\mathbf{\Psi 2}$ в привязке к неподвижной системе координат может быть вычислена следующим образом:

$$ {}_{X}\mathbf{\Psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\left(\exp\frac{{}_{X}\mathbf{\Psi 2}}{2} \circ \exp\frac{{}_{X}\mathbf{\Psi 1}}{2} \right). \qquad (4.142) $$

Эта формула может быть обобщена и на большее число слагаемых.

$$ {}_{X}\mathbf{\Psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\left(\exp\frac{{}_{X}\mathbf{\Psi n}}{2} \circ \ldots \circ \exp\frac{{}_{X}\mathbf{\Psi 2}}{2} \circ \exp\frac{{}_{X}\mathbf{\Psi 1}}{2} \right). \qquad (4.143) $$

4.7.5. Преобразование координат

Рассмотрим произвольный винт, лежащий на прямой, связанной с твердым телом. Тело (вместе с винтом) переместилось так, что этому перемещению соответствует нормированный дуальный кватернион $\mathbf{\Lambda}$. Начальное положение связанного винта (до перемещения твердого тела) обозначим через **R0**, а конечное (после перемещения) – через **R1**. Прямоугольные дуальные координаты винта **R0** в неподвижной координатной системе **X** обозначим через $X0_1$, $X0_2$, $X0_3$, а координаты винта **R1**, тоже в неподвижной координатной системе **X**, – через $X1_1$, $X1_2$, $X1_3$. Пусть эти координаты определяют чисто винтовые бикватернионы:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R0} = \left[0, X0_1, X0_2, X0_3\right]; \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R1} = \left[0, X1_1, X1_2, X1_3\right]. \tag{4.144} $$

Рассматриваемые бикватернионы связаны зависимостями:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R1} = \mathbf{\Lambda} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R0} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}; \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R0} = \overline{\mathbf{\Lambda}} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R1} \circ \mathbf{\Lambda}, \tag{4.145} $$

где $\overline{\mathbf{\Lambda}}$ – бикватернион, сопряженный с бикватернионом Λ.

Эта формула определяет конечное перемещение винта в пространстве и связывает дуальные ортогональные проекции винта до перемещения и после перемещения на оси одной и той же системы координат **X**.

Рассмотрим теперь связь дуальных ортогональных проекций неизменного винта **R** на оси системы координат **X** и системы координат **Y**, получаемой из **X** винтовым конечным перемещением, задаваемым нормированным дуальным кватернионом **Λ**.

Используя принцип перенесения Котельникова-Штуди и известную кватернионную формулу, получим, что отображения ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{R}$ и ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{R}$ винта **R** связаны бикватернионными соотношениями:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{R} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}; \quad {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{R} = \overline{\mathbf{\Lambda}} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R} \circ \mathbf{\Lambda}. \tag{4.146} $$

4.8. Кинематические уравнения

Аналогично изложенному в разделе 2.10, рассмотрим задачу о движении твердого тела в трехмерном пространстве. Будем пользоваться неподвижной системой координат **X** с координатными осями x_1, x_2, x_3 и подвижной системой координат **Y**(t) с координатными осями $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, соединенной с телом и являющейся функцией времени t. Будем полагать, что положение этого тела является функцией времени t и определяется дуальным бикватернионом **Ψ**(t). Это тот бикватернион, который перемещает неподвижную систему координат **X** до совпадения с подвижной системой координат **Y**(t) в результате одного конечного винтового перемещения. Геометрический смысл этого бикватерниона подробно описан в разделе 3.6.2.

Бикватерниону **Ψ**(t) соответствует половинный экспоненциальный бикватернион, он же собственный бикватернион этого перемещения:

$$ \mathbf{\Lambda}(t) = \exp\frac{\mathbf{\Psi}(t)}{2}. \tag{4.147} $$

Бикватернион **Λ**(t) также может быть использован вместо бикватерниона **Ψ**(t) для определения положения твердого тела в пространстве. В разделе 4.7.1 показано, что в случае, когда бикватернион **Ψ**(t) является чисто винтовым, собственный бикватернион **Λ**(t) является нормированным, то есть, имеет единичную норму и параметр равный нулю. Заметим, что компоненты бикватернионов **Λ**(t) и **Ψ**(t) одинаковы в неподвижной **X** и подвижной **Y**(t) системах координат.

Пусть твердое тело движется так, что в момент времени t оно имеет скорость, выражаемую винтовой частью дуального бикватерниона

$$ \mathbf{\Omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \varpi \cdot \boldsymbol{\omega}^{\circ}(t). \tag{4.148} $$

Геометрический смысл компонентов винтовой части бикватерниона: $\boldsymbol{\omega}(t)$ – вектор угловой скорости тела, направленный по оси винта, $\boldsymbol{\omega}^{\circ}(t)$ – момент этого вектора относительно начала координат. Тело движется так, что, вращаясь вокруг оси винта с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$, оно перемещается вдоль этой оси с линейной скоростью

$$v(t) = \frac{\omega_1(t)\cdot\omega^{\circ}{}_1(t) + \omega_2(t)\cdot\omega^{\circ}{}_2(t) + \omega_3(t)\cdot\omega^{\circ}{}_3(t)}{\sqrt{\omega_1^2(t)+\omega_2^2(t)+\omega_3^2(t)}} = \lceil \boldsymbol{\Omega}(t) \rceil_{\bullet} \cdot \langle \boldsymbol{\omega}(t) \rangle . \tag{4.149}$$

Если компоненты бикватерниона $\boldsymbol{\Omega}(t)$ представлены в подвижной (соединенной с телом) системе координат, возможна и другая геометрическая интерпретация компонентов этого бикватерниона: ${}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)$ – вектор угловой скорости тела в подвижной системе координат; ${}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}^{\circ}(t)$ – вектор линейной скорости начала подвижной системы координат в подвижной системе координат.

Задача заключается в составлении дифференциального уравнения для определения бикватерниона $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ или бикватерниона $\boldsymbol{\Psi}(t)$ по бикватерниону $\boldsymbol{\Omega}(t)$. Применяя принцип перенесения Котельникова-Штуди к кинематическим дифференциальным уравнениям движения твердого тела с одной неподвижной точкой (2.294), (2.296) и (2.297), можем записать кинематическое дифференциальное уравнение для определения собственного бикватерниона $\boldsymbol{\Lambda}(t)$:

$$\boldsymbol{\Lambda}'(t) = \frac{\boldsymbol{\Omega}(t)}{2} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t) , \tag{4.150}$$

которое справедливо для случаев, когда все входящие в него бикватернионы представлены в одной и той же системе координат. Если же кватернион $\boldsymbol{\Omega}(t)$ представлен своими компонентами в подвижной системе координат, а дифференциал собственного бикватерниона – в неподвижной, дифференциальное уравнение будет несколько иным:

$${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}'(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\Omega}(t)}{2} . \tag{4.151}$$

На основании принципа перенесения Котельникова-Штуди к кинематическим дифференциальным уравнениям движения твердого тела с одной неподвижной точкой (2.310), можем записать кинематическое дифференциальное уравнение движения свободного твердого тела для определения бикватерниона истинного эйлерова перемещения $\boldsymbol{\Psi}(t)$:

$$\boldsymbol{\Psi}'(t) = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}(t) + \frac{\Psi_{\bullet}(t)\cdot\dfrac{\boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}(t)}{2} \circ \exp\dfrac{\boldsymbol{\Psi}(t)}{2}}{\exp\dfrac{\Psi_0(t)}{2}\cdot\sin\dfrac{\Psi_{\bullet}(t)}{2}} , \tag{4.152}$$

где $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}(t)$ – коаксиальная и $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}(t)$ – нормальная составляющие бикватерниона $\boldsymbol{\Omega}(t)$ по отношению к оси бикватерниона $\boldsymbol{\Psi}(t)$, $\Psi_0(t)$ – дуальная часть и $\Psi_{\bullet}(t)$ – дуальный угол бикватерниона $\boldsymbol{\Psi}(t)$.

Если бикватернион угловой скорости задан в подвижной системе координат, а производная $\mathbf{\Psi}'(t)$ – в неподвижной, кинематическое уравнение имеет вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{\Omega c}(t) + \frac{\Psi_{\bullet}(t)\cdot\exp\dfrac{\mathbf{\Psi}(t)}{2}\circ\dfrac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega n}(t)}{2}}{\exp\dfrac{\Psi_0(t)}{2}\cdot\sin\dfrac{\Psi_{\bullet}(t)}{2}}. \tag{4.153} $$

Заметим, что кватернионы $\mathbf{\Psi}(t)$ и $\mathbf{\Omega c}(t)$ коллинеарны и имеют одинаковые компоненты как в неподвижной, так и в подвижной системах координат. Поэтому в их обозначениях отсутствуют левые нижние индексы.

Дифференциальное уравнение (4.153) можно записать по-иному:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{\Omega c}(t) + \frac{\Psi_{\bullet}(t)}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\Psi_{\bullet}(t)}{2}\cdot{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega n}(t) + \frac{\mathbf{\Psi}(t)\circ{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t) - {}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)\circ\mathbf{\Psi}(t)}{4}, \tag{4.154} $$

а также покомпонентно:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}'(t) = \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}}\Omega_0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes}\cdot E_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes}\cdot E_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes}\cdot E_3 \end{bmatrix} + \frac{\Psi_{\bullet}}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\Psi_{\bullet}}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ {}_{\mathbf{Y}}\Omega_1 - {}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes}\cdot E_1 \\ {}_{\mathbf{Y}}\Omega_2 - {}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes}\cdot E_2 \\ {}_{\mathbf{Y}}\Omega_3 - {}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes}\cdot E_3 \end{bmatrix} + \frac{\Psi_{\bullet}}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ E_2\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_3 - E_3\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_2 \\ E_3\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_1 - E_1\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_3 \\ E_1\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_2 - E_2\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_1 \end{bmatrix}, \tag{4.155} $$

где E_1, E_2, E_3 определяются формулой:

$$ E_i = \frac{\Psi_i}{\Psi_{\bullet}} \quad (i = 1,2,3), \tag{4.156} $$

а коэффициент ${}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes}$ следующим образом:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\Omega_{\otimes} = E_1\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_1 + E_2\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_2 + E_3\cdot{}_{\mathbf{Y}}\Omega_3. \tag{4.157} $$

В качестве $\Psi_{\bullet}$ можно принять $\langle\mathbf{\Psi}\rangle$, вычисляемое в соответствии с формулой (4.14).

В формулах (4.155) – (4.157) функциональная зависимость величин от времени t для краткости письма не указана.

4.9. Использование бикватернионов общего вида

В предыдущих разделах были использованы два основных бикватерниона: бикватернион истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{\psi} + \varpi\cdot\boldsymbol{\psi}^{\circ}$ и собственный бикватернион конечного перемещения $\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + \varpi\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$. Бикватернион $\mathbf{\Psi}$, за исключением формул (4.152)–(4.157), был чисто винтовым. Дуальная часть этого бикватерниона – нулевая:

$$ \Psi_0 = 0 + \varpi\cdot 0. \tag{4.158} $$

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ был нормированным, то есть норма этого кватерниона – единица:

$$ \|\mathbf{\Lambda}\| = 1 + \varpi\cdot 0. \tag{4.159} $$

В развернутом виде это условие таково:

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1;\quad \lambda_0\cdot\lambda^\circ{}_0+\lambda_1\cdot\lambda^\circ{}_1+\lambda_2\cdot\lambda^\circ{}_2+\lambda_3\cdot\lambda^\circ{}_3=0. \tag{4.160}$$

Если бикватернион истинного эйлерова перемещения дополнить ненулевой дуальной частью:

$$\Psi_0=\psi_0+\varpi\cdot\psi^\circ{}_0, \tag{4.161}$$

то основные (незначительно модифицированные) формулы для суммирования перемещений и преобразования координат будут давать правильные результаты не только для рассматриваемых винтов, но и для дуальных частей бикватернионов, которым надо придать соответствующий геометрический смысл.

Здесь находятся поэлементные формулы, базирующиеся на бикватернионных формулах, где исходными данными являются **E,** Ψ_0 и $\Psi_\bullet$:

Формула в бикватернионах:

$$\mathbf{\Psi}=\mathbf{I}\cdot\Psi_0+\mathbf{E}\cdot\Psi_\bullet. \tag{4.162}$$

Поэлементная формула:

$$\Psi_0=\psi_0+\varpi\cdot\psi^\circ{}_0;\quad \Psi_i=\psi_\bullet\cdot e_i+\varpi\cdot(\psi^\circ{}_\bullet\cdot e_i+\psi_\bullet\cdot e^\circ{}_i)\quad (i=1,2,3). \tag{4.163}$$

Формула для собственного бикватерниона:

$$\mathbf{\Lambda}=\exp\frac{\Psi_0}{2}\cdot\left(\mathbf{I}\cdot\cos\frac{\Psi_\bullet}{2}+\mathbf{E}\cdot\sin\frac{\Psi_\bullet}{2}\right). \tag{4.164}$$

Поэлементная формула:

$$\begin{gathered}\Lambda_0=\exp\frac{\psi_0}{2}\cdot\left[\cos\frac{\psi_\bullet}{2}+\varpi\cdot\left(\frac{\psi^\circ{}_0}{2}\cdot\cos\frac{\psi_\bullet}{2}-\frac{\psi^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\sin\frac{\psi_\bullet}{2}\right)\right];\\ \Lambda_i=\exp\frac{\psi_0}{2}\cdot\left\{e_i\cdot\sin\frac{\psi_\bullet}{2}+\varpi\cdot\left[e_i\cdot\frac{\psi^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\cos\frac{\psi_\bullet}{2}+\left(e_i\cdot\frac{\psi^\circ{}_0}{2}+e^\circ{}_i\right)\cdot\sin\frac{\psi_\bullet}{2}\right]\right\}(i=1,2,3).\end{gathered} \tag{4.165}$$

Модуль и аргумент собственного ненормированного бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$ в этих же переменных выражаются так:

$$\left|\mathbf{\Lambda}\right|=\exp\frac{\psi_0}{2}\cdot\left(1+\varpi\cdot\frac{\psi^\circ{}_0}{2}\right);\quad \arg\mathbf{\Lambda}=\frac{\psi_\bullet}{2}+\varpi\cdot\frac{\psi^\circ{}_\bullet}{2}. \tag{4.166}$$

4.9.1. Сложение конечных перемещений

Пусть требуется определить бикватернион истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}$, которое является результатом последовательного выполнения перемещений, представляемых чисто винтовыми бикватернионами $\mathbf{\Psi 1}$ и $\mathbf{\Psi 2}$. Обычная методика заключается в том, что для исходных перемещений строятся собственные (половинные экспоненциальные) бикватернионы:

$$\mathbf{\Lambda 1}=\exp\frac{\mathbf{\Psi 1}}{2};\quad \mathbf{\Lambda 2}=\exp\frac{\mathbf{\Psi 2}}{2}, \tag{4.167}$$

на базе которых вычисляется собственный бикватернион результирующего перемещения:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda 2} \circ \mathbf{\Lambda 1}, \tag{4.168}$$

а по этому бикватерниону вычисляется бикватернион результирующего истинного эйлерова перемещения:

$$\mathbf{\Psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\, \mathbf{\Lambda}. \tag{4.169}$$

На основании этой методики можно записать единую формулу для сложения истинных эйлеровых перемещений:

$$\mathbf{\Psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\left(\exp \frac{\mathbf{\Psi 2}}{2} \circ \exp \frac{\mathbf{\Psi 1}}{2} \right). \tag{4.170}$$

Анализируя формулы (9.86) и (9.87), замечаем, что из чисто винтовых бикватернионов **Ψ1** и **Ψ2** по формулам (4.167) получаются нормированные бикватернионы **Λ1** и **Λ2**, по формуле (4.168) получается нормированный бикватернион **Λ** с единичной нормой, поскольку при перемножении бикватернионов их нормы перемножаются, а по формуле (4.169) получается чисто винтовой бикватернион, что следует из формул (9.81).

Если вместо чисто винтовых бикватернионов **Ψ1** и **Ψ2**, использовать бикватернионы с теми же винтами, но с ненулевой дуальной частью, построенные по формулам:

$$\mathbf{\Psi 1} = \mathbf{I} \cdot \Psi 1_0 + \mathbf{E1} \cdot \Psi 1_\bullet; \quad \mathbf{\Psi 2} = \mathbf{I} \cdot \Psi 2_0 + \mathbf{E2} \cdot \Psi 2_\bullet, \tag{4.171}$$

то, воспользовавшись формулами (4.167)–(4.169), получим результирующий бикватернион вида:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{I} \cdot \Psi_0 + \mathbf{E} \cdot \Psi_\bullet, \tag{4.172}$$

дуальная часть которого будет равна сумме дуальных частей бикватернионов **Ψ1** и **Ψ2**:

$$\Psi_0 = \Psi 1_0 + \Psi 2_0; \quad \psi_0 = \psi 1_0 + \psi 2_0; \quad \psi^\circ{}_0 = \psi 1^\circ{}_0 + \psi 2^\circ{}_0. \tag{4.173}$$

Что касается собственных бикватернионов **Λ1**, **Λ2** и **Λ**, вычисляемых по формулам (4.167) и (4.168), то их верзоры не меняются, а модули становятся соответственно такими:

$$\exp \frac{\Psi 1_0}{2}; \quad \exp \frac{\Psi 2_0}{2}; \quad \exp \frac{\Psi 1_0}{2} \cdot \exp \frac{\Psi 2_0}{2}. \tag{4.174}$$

4.9.2. Преобразование координат

Если тело, к которому присоединена подвижная система координат **Y**, в исходном состоянии расположить так, чтобы подвижная система координат совпадала с неподвижной системой координат **X**, а затем придать телу винтовое перемещение, описываемое бикватернионом **Ψ**, то мы получим новое положение подвижной системы координат **Y**. Задача заключается в том, чтобы, зная компоненты бикватер-

ниона $\mathbf{\Psi}$, выразить компоненты винта или бикватерниона ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{R}$, связанные с подвижной системой координат, через компоненты винта или бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{R}$, связанные с неподвижной системой координат.

Формулы (4.146) позволяют решить эту задачу, если известен собственный нормированный бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ перемещения, описываемого бикватернионом $\mathbf{\Psi}$:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{R} = \overline{\mathbf{\Lambda}} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R} \circ \mathbf{\Lambda} . \tag{4.175}$$

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ является половинным экспоненциальным от чисто винтового бикватерниона истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}$. Если бикватернион $\mathbf{\Psi}$ не будет чисто винтовым, то вместо формулы (4.175) нужно применять модифицированную формулу:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R} \circ \mathbf{\Lambda} . \tag{4.176}$$

Справедливость этой формулы интуитивно понятна, поскольку неединичные модули бикватернионов $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ в этой формуле взаимно уничтожаются, и действовать будут только верзоры бикватернионов. Справедлива и обратная формула:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{R} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} . \tag{4.177}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что дуальная часть бикватерниона $\mathbf{R}$ при преобразованиях координат остается неизменной.

4.9.3. Формулы для вектора перемещения

Формулы для вектора $\mathbf{r}$, соединяющего начало неподвижной системы координат X с началом подвижной системы координат $\mathbf{Y}$, ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$ и ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}$ при использовании бикватернионов общего вида:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r} = 2 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ \boldsymbol{\lambda}^{-1}; \quad {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r} = 2 \cdot \boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ \boldsymbol{\lambda}^{\circ} , \tag{4.178}$$

в кватернионной записи остаются без изменения. В переменных, выраженных через компоненты бикватерниона истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}$, эти формулы выглядят так:

– для неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbf{X}}r_0 = \psi^{\circ}{}_0; \\
&{}_{\mathbf{X}}r_1 = e_1 \cdot \psi^{\circ}_{\bullet} + e^{\circ}{}_1 \cdot \sin\psi_{\bullet} + (e_2 \cdot e^{\circ}{}_3 - e_3 \cdot e^{\circ}{}_2) \cdot (1 - \cos\psi_{\bullet}); \\
&{}_{\mathbf{X}}r_2 = e_2 \cdot \psi^{\circ}_{\bullet} + e^{\circ}{}_2 \cdot \sin\psi_{\bullet} + (e_3 \cdot e^{\circ}{}_1 - e_1 \cdot e^{\circ}{}_3) \cdot (1 - \cos\psi_{\bullet}); \\
&{}_{\mathbf{X}}r_3 = e_3 \cdot \psi^{\circ}_{\bullet} + e^{\circ}{}_3 \cdot \sin\psi_{\bullet} + (e_1 \cdot e^{\circ}{}_2 - e_2 \cdot e^{\circ}{}_1) \cdot (1 - \cos\psi_{\bullet});
\end{aligned} \tag{4.179}$$

– для подвижной системы координат:

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbf{Y}}r_0 = \psi^{\circ}{}_0; \\
&{}_{\mathbf{Y}}r_1 = e_1 \cdot \psi^{\circ}_{\bullet} + e^{\circ}{}_1 \cdot \sin\psi_{\bullet} - (e_2 \cdot e^{\circ}{}_3 - e_3 \cdot e^{\circ}{}_2) \cdot (1 - \cos\psi_{\bullet}); \\
&{}_{\mathbf{Y}}r_2 = e_2 \cdot \psi^{\circ}_{\bullet} + e^{\circ}{}_2 \cdot \sin\psi_{\bullet} - (e_3 \cdot e^{\circ}{}_1 - e_1 \cdot e^{\circ}{}_3) \cdot (1 - \cos\psi_{\bullet}); \\
&{}_{\mathbf{Y}}r_3 = e_3 \cdot \psi^{\circ}_{\bullet} + e^{\circ}{}_3 \cdot \sin\psi_{\bullet} - (e_1 \cdot e^{\circ}{}_2 - e_2 \cdot e^{\circ}{}_1) \cdot (1 - \cos\psi_{\bullet}).
\end{aligned} \tag{4.180}$$

5. Сферическая геометрия

5.1. Системы координат

Одной из областей приложения кватернионов является сферическая геометрия. Связь кватернионов с трехмерной сферой была установлена Гамильтоном. Она описана в разделе 2.7. Здесь же будут рассмотрены различные практические задачи сферической геометрии и показано, как их можно решить при помощи кватернионов.

Рассмотрим системы координат, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Для определения положения точек на сфере применяется географическая система, состоящая из двух угловых координат. Первая из них – долгота, обозначаемая греческой буквой γ. Она изменяется в пределах $-\pi < \gamma \leq \pi$. Положительной считается восточная долгота. Вторая координата – широта, обозначаемая греческой буквой θ. Она изменяется в пределах $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Положительной считается северная широта.

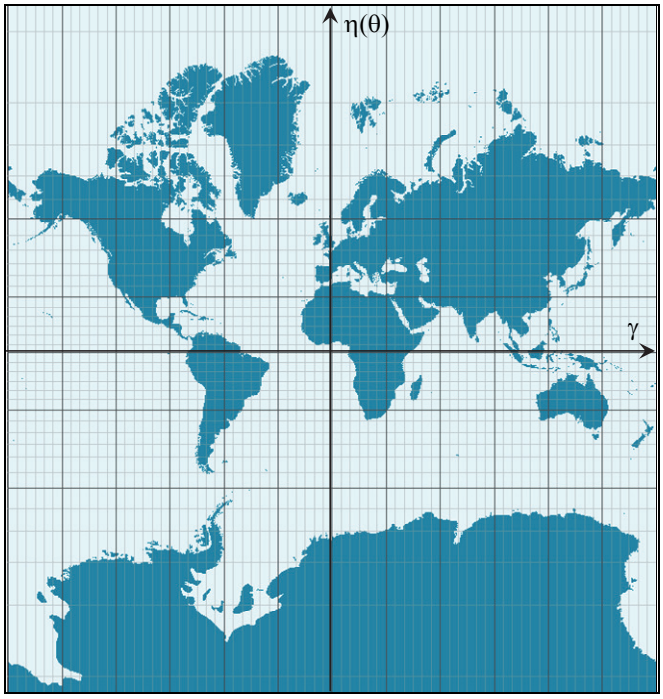


Рис. 5.1. Проекция Меркатора

На проекции Меркатора (рис. 5.1) эти координаты образуют привычную плоскую координатную систему. Правда, для соблюдения свойства равноугольности карты, ордината должна иметь неравномерную шкалу, выражающуюся формулой:

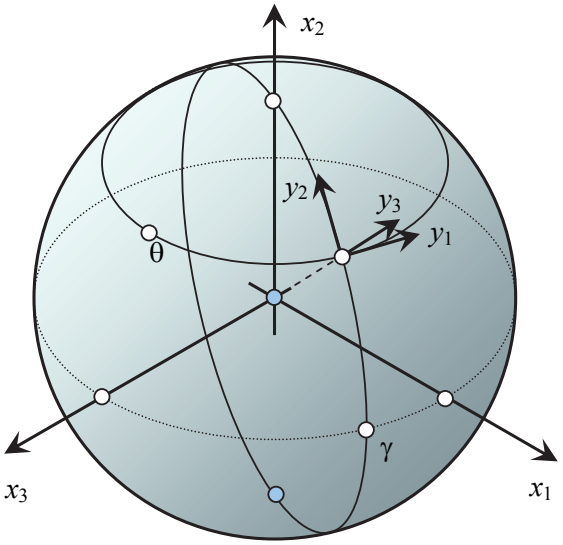


Рис. 5.2. Системы координат

$$\eta(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}. \qquad (5.1)$$

В качестве неподвижной будем использовать декартову систему координат x_1, x_2, x_3, начало которой находится в центре сферы. Ось x_3 проходит через начало географической системы координат ($\gamma = 0$; $\theta = 0$), ось x_2 – через северный полюс, ось x_1 направлена перпендикулярно к этим осям и проходит через точку с географическими координатами $\gamma = \pi/2$; $\theta = 0$ (рис. 5.2).

В качестве подвижной системы координат, связанной с конкретной точкой поверхности сферы, выберем декартову систему координат, начало которой находится в точке с географическими координатами γ, θ; ось y_3 является внешней нормалью к сфере в этой точке, ось y_2 – направлена на север, а ось y_1 – на восток. Такая система определена для каждой точки сферы, кроме полюсов. Обратно, ориентация в пространстве декартовой системы координат однозначно определяет точку сферы.

5.2. Формулы перехода от одной системы координат к другой

Рассмотрим, как повернута подвижная система координат y_1, y_2, y_3 относительно неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3.

Совместим вначале подвижную систему координат (по ориентации) с неподвижной. Затем повернем подвижную систему относительно оси x_1 на угол – θ, а затем относительно оси x_3 – на угол γ (рис. 5.2). После этого подвижная система займет положение, соответствующее точке с географическими координатами γ; θ.

Первый поворот соответствует кватерниону истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\theta} = [0, -\theta, 0, 0]$, а второй поворот – кватерниону истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\gamma} = [0, 0, \gamma, 0]$. Перейдем к экспонентам половинных поворотов:

$$\exp\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} = \left[\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, 0, 0\right]; \quad \exp\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} = \left[\cos\frac{\gamma}{2}, 0, \sin\frac{\gamma}{2}, 0\right]. \qquad (5.2)$$

Половинный экспоненциальный кватернион суммарного поворота может быть вычислен по формуле:

$$\mathbf{q} = \exp\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} \circ \exp\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} = \left[\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right]. \qquad (5.3)$$

Зная кватернион $\mathbf{q}$, можно любой кватернион ${}_{\Upsilon}\mathbf{p}$, заданный в подвижной системе координат, представить в неподвижной системе координат и наоборот по формулам:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} = \mathbf{q} \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p} \circ \mathbf{q}^{-1}; \quad {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{p} = \mathbf{q}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} \circ \mathbf{q}. \tag{5.4} $$

Так единичный вектор, направленный в сторону наружной нормали сферы в точке с географическими координатами γ; θ, в неподвижной системе координат имеет такие компоненты:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} = \mathbf{q} \circ [0,0,0,1] \circ \mathbf{q}^{-1} = \left[0, \sin\gamma \cdot \cos\theta, \sin\theta, \cos\gamma \cdot \cos\theta\right]. \tag{5.5} $$

Пусть в неподвижной системе координат при помощи направляющих косинусов c_1, c_2, c_3 задано некоторое направление. Надо определить географические координаты точки, в которой это направление протыкает сферу.

Из формулы (5.5) следует, что:

$$ c_1 = \sin\gamma \cdot \cos\theta; \quad c_2 = \sin\theta; \quad c_3 = \cos\gamma \cdot \cos\theta, \tag{5.6} $$

откуда:

$$ \theta = \arcsin c_2; \quad \gamma = \arg(c_3 + i \cdot c_1), \tag{5.7} $$

где i – мнимая единица.

5.3. Расстояния между точками на сфере

Пусть требуется найти на поверхности сферы кратчайшее расстояние между двумя точками с координатами γ_1; θ_1 и γ_2; θ_2. Рассмотрим, как это можно сделать при помощи кватернионов.

В неподвижной системе координат, в соответствии с формулой (5.5), направления на эти точки могут быть представлены нормированными кватернионами-векторами:

$$ {}_{\mathrm{x}}\mathbf{c1} = \left[0, \sin\gamma_1 \cdot \cos\theta_1, \sin\theta_1, \cos\gamma_1 \cdot \cos\theta_1\right]; \; {}_{\mathrm{x}}\mathbf{c2} = \left[0, \sin\gamma_2 \cdot \cos\theta_2, \sin\theta_2, \cos\gamma_2 \cdot \cos\theta_2\right]. \tag{5.8} $$

Известно (см. приложение 9.3.5), что половинный экспоненциальный кватернион, осуществляющий поворот подвижного тела по кратчайшему пути так, чтобы направление ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{c1}$ совпало с направлением ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{c2}$, имеет следующий вид:

$$ \mathbf{p} = \left[\sqrt{\frac{1+c_0}{2}}, \quad \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-c_0}{2}}, \quad \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-c_0}{2}}, \quad \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-c_0}{2}} \right], \tag{5.9} $$

где

$$ \mathbf{c} = {}_{\mathrm{x}}\mathbf{c1} \circ \overline{{}_{\mathrm{x}}\mathbf{c2}} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\ -\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \end{bmatrix}. \tag{5.10} $$

Кратчайшее расстояние между заданными точками может быть вычислено через половинный угол поворота по формуле:

$$ L = 2 \cdot R \cdot \arg \mathbf{p} = 2 \cdot R \cdot \arg[p_0 + i \cdot \langle \mathbf{p} \rangle], \tag{5.11} $$

где R – радиус сферы; i – мнимая единица.

Из структуры формулы (5.9) следует, что

$$p_0 = \sqrt{\frac{1+c_0}{2}}; \quad \langle \mathbf{p} \rangle = \sqrt{\frac{1-c_0}{2}}, \tag{5.12}$$

а из формулы (5.10) видно:

$$c_0 = \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1). \tag{5.13}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что:

$$c_0 = 1 - 2 \cdot \left(\sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right). \tag{5.14}$$

Подставляя (5.14) в (5.12), получим:

$$p_0 = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}}; \tag{5.15}$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}}. \tag{5.16}$$

Формула для определения расстояния между точками на сфере, наиболее часто встречающаяся в литературе:

$$L = R \cdot \arccos\left[\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1)\right], \tag{5.17}$$

плохо обусловлена при определении расстояний между близлежащими точками и между антиподами, а поэтому приводит к погрешностям. Формулы (5.11), (5.15) и (5.16) свободны от этого недостатка и рекомендуются к применению.

5.4. Углы между большими окружностями на сфере

Задача состоит в определении угла между положительными направлениями двух ориентированных больших окружностей в точке их пересечения.

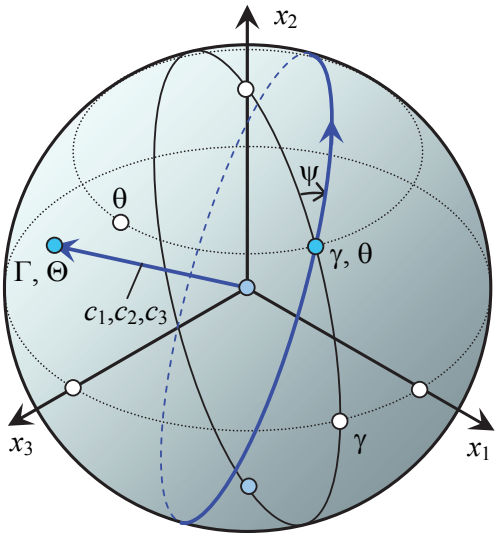


Рис. 5.3. Методы задания большой окружности

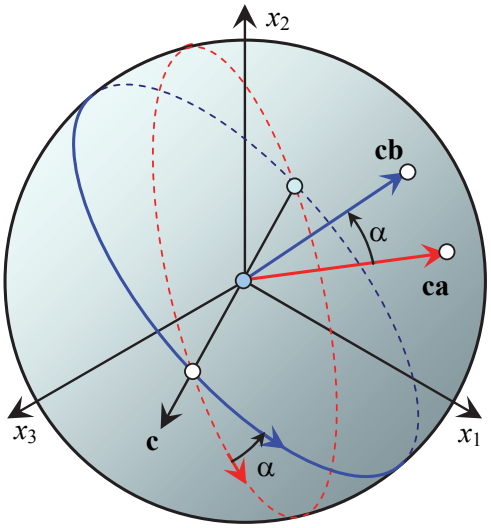


Рис. 5.4. Угол между большими окружностями

Рассмотрим три метода задания ориентированной большой окружности на сфере (рис. 5.3). В неподвижной системе координат большую окружность на сфере и ее ориентацию удобно задавать направляющими косинусами вектора, нормального плоскости этой окружности c_1, c_2, c_3. Ориентация этой окружности определяется по правилу буравчика. Это и есть первый метод задания исходных данных об окружности.

Второй метод задания окружности отличается от первого только тем, что вместо направляющих косинусов задают долготу Г и широту Θ точки, в которой упомянутый выше нормальный вектор пересекает поверхность сферы.

Третий метод задания окружности состоит в следующем. Задаются географические координаты γ и θ точки, через которую проходит большая окружность, и географический азимут ψ направления положительного обхода окружности. Географический азимут – это угол, отсчитываемый по часовой стрелке от северного направления до заданного направления и принимающий значения от 0 до $2\cdot\pi$.

Задача, поставленная в начале раздела, проиллюстрирована на рис. 5.4. Там изображены две большие окружности и векторы **ca** и **cb**, нормальные к этим окружностям. Положительное направление обхода окружностей показано стрелками, расположенными на окружностях. Как видно из рисунка, угол α между положительными направлениями обхода окружностей равен углу между векторами, нормальными плоскостям этих окружностей.

Для определения угла между положительными направлениями обхода больших окружностей введем в рассмотрение чисто векторные кватернионы:

$$\mathbf{ca} = [0; ca_1, ca_2; ca_3]; \quad \mathbf{cb} = [0; cb_1, cb_2; cb_3]. \tag{5.18}$$

В соответствии с формулой (2.33) при умножении чисто векторных кватернионов получаем кватернион, скалярная часть которого равна скалярному произведению кватернионов-сомножителей с обратным знаком, а векторная часть – векторному произведению этих кватернионов. Нетрудно сообразить, что кватернион

$$\mathbf{c} = \mathbf{cb} \circ \overline{\mathbf{ca}} = \begin{bmatrix} ca_1 \cdot cb_1 + ca_2 \cdot cb_2 + ca_3 \cdot cb_3 \\ ca_2 \cdot cb_3 - ca_3 \cdot cb_2 \\ ca_3 \cdot cb_1 - ca_1 \cdot cb_3 \\ ca_1 \cdot cb_2 - ca_2 \cdot cb_1 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

содержит в своей скалярной части скалярное произведение кватернионов-сомножителей со знаком "+", а в векторной части – векторное произведение этих кватернионов: **ca** × **cb**. Компоненты этого кватерниона могут быть представлены также в следующем виде:

$$\mathbf{c} = \left[\cos\alpha; \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin\alpha; \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin\alpha; \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin\alpha \right]. \tag{5.20}$$

Угол между положительными направлениями больших окружностей можно определить по формуле:

$$\alpha = \arg \mathbf{c} = \arg(c_0 + i \cdot \langle \mathbf{c} \rangle). \tag{5.21}$$

Таким образом, получено решение задачи при первом методе задания исходных данных. Если же исходные данные представлены по второму методу, можно воспользоваться формулой (5.6). Тогда кватернионы **ca** и **cb** можно будет выразить формулами:

$$\mathbf{ca} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \Gamma a \cdot \cos \Theta a \\ \sin \Theta a \\ \cos \gamma a \cdot \cos \Theta a \end{bmatrix}; \quad \mathbf{cb} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \Gamma b \cdot \cos \Theta b \\ \sin \Theta b \\ \cos \Gamma b \cdot \cos \Theta b \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

где Γa и Θa – географические координаты точки для окружности a, Γb и Θb – географические координаты точки для окружности b.

Далее надо воспользоваться формулами (5.19)и (5.21).

Для того, чтобы получить формулы для третьего метода задания исходных данных, когда окружности заданы географическими координатами и азимутами γa, θa ψa, γb, θb ψb, рассмотрим, как определить направляющие косинусы вектора, нормального к плоскости окружности, проходящей через точку с географическими координатами (γb; θb), если положительное направление ее обхода имеет географический азимут ψb.

В данном случае окружность, содержащую меридиан, проходящий через точку с координатами (γb; θb), будем ассоциировать с кватернионом **ca**. Легко видеть, что этот кватернион имеет компоненты:

$$\mathbf{ca} = [0; -\cos \gamma b; 0; \sin \gamma b]. \tag{5.23}$$

Окружность, для которой мы ищем направляющие косинусы, будем ассоциировать с кватернионом **cb**. Как следует из формулы (5.20), результирующий кватернион **c** имеет компоненты вида:

$$\mathbf{c} = \left[\cos \psi b; \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \psi b; \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \psi b; \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \psi b \right], \tag{5.24}$$

а направляющие косинусы c_1, c_2, c_3 определяются из условия, что векторная часть **c** протыкает сферу в точке с географическими координатами (γb; θb). Воспользовавшись формулами (5.6), получим:

$$\mathbf{c} = \left[\cos \psi b, \sin \gamma b \cdot \cos \theta b \cdot \sin \psi b, \sin \theta b \cdot \sin \psi b, \cos \gamma b \cdot \cos \theta b \cdot \sin \psi b \right]. \tag{5.25}$$

На основании формулы (5.19)

$$\mathbf{cb} = \mathbf{c} \circ \mathbf{ca}. \tag{5.26}$$

Выполняя умножение кватернионов, получим:

$$\mathbf{cb} = \begin{bmatrix} 0 \\ cb_1 \\ cb_2 \\ cb_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta b \cdot \sin\gamma b \cdot \sin\psi b - \cos\gamma b \cdot \cos\psi b \\ -\cos\theta b \cdot \sin\psi b \\ \sin\theta b \cdot \cos\gamma b \cdot \sin\psi b + \sin\gamma b \cdot \cos\psi b \end{bmatrix}. \tag{5.27}$$

Таким же путем получим формулы для кватерниона **ca**:

$$\mathbf{ca} = \begin{bmatrix} 0 \\ ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta a \cdot \sin\gamma a \cdot \sin\psi a - \cos\gamma a \cdot \cos\psi a \\ -\cos\theta a \cdot \sin\psi a \\ \sin\theta a \cdot \cos\gamma a \cdot \sin\psi a + \sin\gamma a \cdot \cos\psi a \end{bmatrix}. \tag{5.28}$$

Далее, как и в предыдущем случае, для определения угла надо воспользоваться формулами (5.19) и (5.21).

5.5. Контуры на сфере

Рассмотрим гладкий контур на сфере, который имеет начальную точку O и направление обхода – против часовой стрелки (рис. 5.5). Точки контура определяются параметром t, монотонно возрастающим при обходе контура в положительном направлении. Каждой точке контура припишем подвижный декартов репер y_1, y_2, y_3, являющийся функцией параметра t. Первый орт этого репера направлен по касательной к линии контура в направлении его обхода. Третий орт направлен по внешней нормали к сфере. Второй орт направлен по касательной к сфере и образует с двумя другими ортами правую тройку.

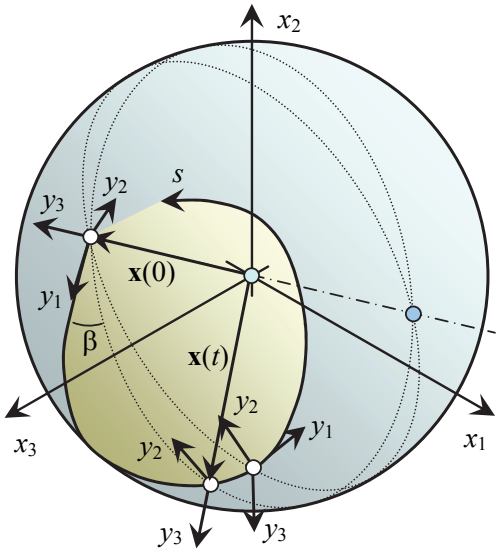


Рис. 5.5. Гладкий контур на сфере

Для каждой точки контура определим два кватерниона. Первый из них – $\mathbf{x}(t)$, компоненты которого имеют размерность длины, причем $x_0(t)$ – длина контура от начальной точки до текущей, а $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ – координаты текущей точки в неподвижной системе координат. Второй кватернион – $\boldsymbol{\varphi}(t)$, определяющий ориентацию подвижного репера по отношению к неподвижному. При этом $\varphi_0(t)$ – интегральный угол геодезического поворота контура при перемещении по контуру из исходной его точки в текущую, то есть сумма бесконечно малых поворотов вокруг оси 3 подвижного репера, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ – компоненты вектора, вокруг которого и на величину которого надо повернуть неподвижный репер, чтобы он совпал по ориентации с текущим положением подвижного репера. Для преобразования координат будем пользоваться экспонентой половины этого кватерниона:

$$\mathbf{q}(t) = \exp\frac{\boldsymbol{\varphi}(t)}{2}. \tag{5.29}$$

Для кватернионов $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ справедливы кинематические дифференциальные уравнения:

$$_{\mathrm{x}}\mathbf{x}'(t) = \mathbf{q}(t) \circ {}_{\mathrm{y}}\mathbf{v}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t), \tag{5.30}$$

где ${}_{\mathrm{y}}\mathbf{v}(t) = [v(t), v(t), 0, 0]$; $v(t)$ – скорость изменения дуговой координаты контура s по параметру t,

$$\mathbf{q}'(t) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(t) \circ {}_{\mathrm{y}}\boldsymbol{\omega}(t), \tag{5.31}$$

где ${}_{\mathrm{y}}\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega(t), 0, v(t)/R, \omega(t)]$; $\omega(t)$ – скорость поворота подвижного репера вокруг орта 3 подвижной системы координат по отношению к параметру t. Штрихом обозначена производная по t.

Автомобильная аналогия. Представим себе, что по поверхности сферы вдоль линии контура движется автомобиль. С автомобилем связан подвижный репер. Орт 1 этого репера направлен вперед, орт 2 в левую сторону, орт 3 направлен вверх. Параметр t – время. Скорость автомобиля – $v(t)$. Угловая скорость его поворота относительно вертикальной оси – $\omega(t)$, положительное направление – влево. Если руль автомобиля держать прямо, автомобиль будет передвигаться по геодезической линии, то есть по большому кругу сферы. Если руль автомобиля повернуть, то автомобиль будет передвигаться по кривой линии, причем ее геодезическая кривизна будет:

$$\kappa(t) = \frac{\omega(t)}{v(t)}. \tag{5.32}$$

Эта аналогия позволяет наглядно представить рассматриваемые процессы.

5.6. Длина контура и площадь поверхности сферы, ограниченная контуром

Кинематические уравнения (5.30), (5.31) позволяют по $v(t)$ – скорости движения подвижного репера в направлении оси 1, по $\omega(t)$ – скорости поворота подвижного репера вокруг орта 3 и по начальным значениям кватернионов $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{q}(0)$ вычислить значения кватернионов $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ в функции от времени и тем самым определить контур на поверхности сферы. Компоненты $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ кватерниона $\mathbf{x}(t)$ определяют координаты точки контура, соответствующие моменту времени t, а компоненты кватерниона $\mathbf{q}(t)$ ориентацию подвижного репера, соответствующую этому моменту, относительно неподвижной системы координат.

Компонент $x_0(t)$ по определению представляет собой дуговую координату контура:

$$x_0(t) = s(t) = \int_0^t v(t) \cdot dt, \tag{5.33}$$

а компонент $\varphi_0(t)$ – угловую координату или интегральный угол геодезического поворота контура:

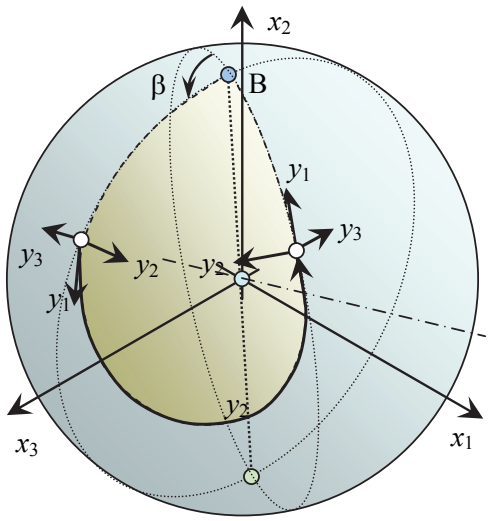


Рис. 5.6. К определению площади контура

$$\varphi_0(t) = \psi(t) = \int_0^t \omega(t) \cdot dt \,. \qquad (5.34)$$

Поскольку между кватернионами $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ существует функциональная связь, определяемая формулой (5.29), то эта координата может быть вычислена по формуле:

$$\psi(t) = 2 \cdot \ln\left|\mathbf{q}(t)\right| = \ln\left\|\mathbf{q}(t)\right\| . \qquad (5.35)$$

Угловая координата контура на сфере имеет непосредственную связь с площадью сферической поверхности, ограниченной контуром (рис. 5.6). Из теоремы Гаусса-Бонне [49] известно, что площадь сферической поверхности, находящейся слева по ходу контура, при замкнутом гладком контуре, пробегаемом за время T, может быть вычислена по формуле:

$$F = R^2 \cdot \left[2 \cdot \pi - \psi(T)\right] . \qquad (5.36)$$

Если контур не замкнут, дополним его до замыкания двумя отрезками больших окружностей. Первая из них гладко входит в контур в начальной точке при $t = 0$, вторая гладко выходит из него в конечной точке при $t = T$. Рассматриваемые большие окружности пересекаются в точке B, которая является началом первого отрезка и концом второго. В общем случае в точке B происходит излом теперь уже замкнутого контура. Пусть β есть угол этого излома. Тогда угловая координата или интегральный угол геодезического поворота достроенного контура увеличится скачкообразно на угол β. Дополнительные участки больших окружностей угловую координату не изменят, поскольку их геодезическая кривизна равна нулю. Следовательно, для определения площади замкнутого дополненного контура Fd будет справедливой формула:

$$Fd = R^2 \cdot \left[2 \cdot \pi - \psi(T) - \beta\right] . \qquad (5.37)$$

Угол β можно определить через кватернионы $\mathbf{q}(0)$ и $\mathbf{q}(t)$. При этом можно исходить из того, что орт 2 подвижного репера в точке $t = 0$ перпендикулярен плоскости большой окружности, примыкающей гладко к началу контура, а орт 2 подвижного репера в точке $t = T$ перпендикулярен плоскости большой окружности, примыкающей гладко к концу контура. Угол между этими ортами как раз и будет β.

Перенесем орт 2 подвижного репера в точке $t = T$ в систему координат подвижного репера в точке $t = 0$:

$$\mathbf{Y}_{(0)} y_2(T) = \mathbf{q}^{-1}(0) \circ \mathbf{q}(T) \circ \mathbf{Y}_{(T)} y_2(T) \circ \mathbf{q}^{-1}(T) \circ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(0T) \circ \mathbf{Y}_{(T)} y_2(T) \circ \mathbf{q}^{-1}(0T) , \qquad (5.38)$$

где обозначено:

$$\mathbf{q}(0T) = \mathbf{q}^{-1}(0) \circ \mathbf{q}(T). \tag{5.39}$$

Известно, что кватернионное произведение двух чисто векторных кватернионов имеет следующий геометрический смысл. Скалярная часть этого произведения равна скалярному произведению сомножителей, взятому с обратным знаком, а векторная часть произведения – векторному произведению сомножителей. Вычислим кватернионное произведение ортов $y_2(0)$ и $y_2(T)$ в подвижной системе координат при t =0:

$$\mathbf{p} = {}_{\mathbf{Y}(0)}y_2(0) \circ \mathbf{q}(0T) \circ {}_{\mathbf{Y}(T)}y_2(T) \circ \mathbf{q}^{-1}(0T) = [0,0,1,0] \circ \mathbf{q}(0T) \circ [0,0,1,0] \circ \mathbf{q}^{-1}(0T). \tag{5.40}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что:

$$[0,0,1,0] \circ \mathbf{q}(0T) \circ [0,0,1,0] = [-q_0(0T),\, q_0(0T),\, -q_0(0T),\, q_0(0T)]. \tag{5.41}$$

С учетом этого получим:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\|\mathbf{q}(0T)\|} \cdot \begin{bmatrix} -q_0^2(0T) + q_1^2(0T) - q_2^2(0T) + q_3^2(0T) \\ 2 \cdot [q_0(0T) \cdot q_1(0T) + q_2(0T) \cdot q_3(0T)] \\ 0 \\ 2 \cdot [q_0(0T) \cdot q_3(0T) - q(0T)_1 \cdot q_2(0T)] \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Отсюда

$$p_0 = B^2 - A^2; \quad \langle \mathbf{p} \rangle = 2 \cdot A \cdot B, \tag{5.43}$$

где

$$A = \frac{\sqrt{q_0^2(0T) + q_2^2(0T)}}{|\mathbf{q}(0T)|}; \quad B = \frac{\sqrt{q_1^2(0T) + q_3^2(0T)}}{|\mathbf{q}(0T)|}. \tag{5.44}$$

Искомый угол найдем по формуле:

$$\beta = \arg[-p_0 + i \cdot \langle \mathbf{p} \rangle] = \arg(A^2 - B^2 + 2 \cdot i \cdot A \cdot B) = \arg(A + B \cdot i)^2 = 2 \cdot \arg(A + B \cdot i). \tag{5.45}$$

Функции этого угла:

$$\cos\frac{\beta}{2} = A; \quad \sin\frac{\beta}{2} = B; \quad \cos\beta = A^2 - B^2; \quad \sin\beta = 2 \cdot A \cdot B. \tag{5.46}$$

5.7. Круговые контуры

Круговой контур получается, если задать $v(t)$ = const; $\omega(t)$ = const. При этом должны удовлетворяться кинематические уравнения (5.30), (5.31). Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что решение этих дифференциальных уравнений таково:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{qc} \circ \exp\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot t}{2}; \quad {}_{\mathrm{X}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{xc} + \mathbf{q}(t) \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{x}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t), \tag{5.47}$$

где **qc**, **xc** – произвольные постоянные кватернионы; $\boldsymbol{\omega} = [\omega, 0, v/R, \omega]$ – кватернион угловых скоростей; $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle = \sqrt{v^2/R^2 + \omega^2}$; R – радиус сферы; v – скорость изменения дуговой координаты контура; ω – скорость геодезического поворота (то есть, скорость поворота подвижного репера вокруг орта 3 подвижной системы координат); ${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{x}(t) = [v{\cdot}t, 0, 0, R]$ – координаты текущей точки контура относительно неподвижной системы координат по рис. 5.2 в подвижной системе координат.

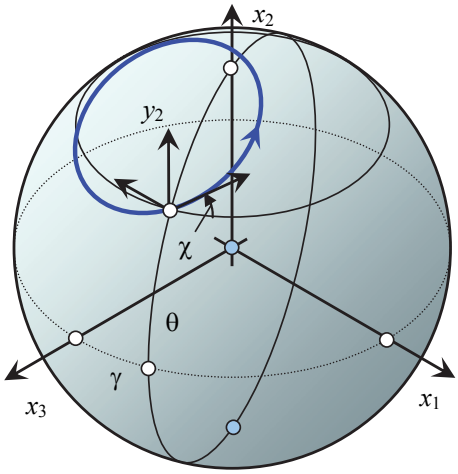


Рис. 5.7. К назначению постоянных кватернионов

Рассмотрим, как назначаются произвольные постоянные кватернионы **qc** и **xc** в общих решениях дифференциальных уравнений (5.47). Пусть требуется провести круговой контур, начинающийся в точке с географическими координатами γ, θ в направлении, отклоненном от параллели на угол χ против часовой стрелки (рис. 5.7).

Кватернион **qc** определяет ориентацию подвижного репера в начальной точке контура. Орт с номером 3 этого репера должен представлять внешнюю нормаль к сфере в точке с географическими координатами γ, θ, орт с номером 1 должен быть повернут относительно восточного направления параллели на угол χ против часовой стрелки, а орт с номером 2 должен образовывать в совокупности с ортами 1 и 3 правую тройку.

Приведение неподвижного репера в описанное выше положение можно выполнить при помощи трех простых поворотов. Первый поворот соответствует кватерниону истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\theta} = [0, -\theta, 0, 0]$ в неподвижной системе координат, второй поворот – кватерниону истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\gamma} = [0, 0, \gamma, 0]$ в неподвижной системе координат, а третий поворот – кватерниону истинного эйлерова поворота $\boldsymbol{\chi} = [0, 0, 0, \chi]$ в подвижной системе координат. Нулевые компоненты этих кватернионов приняты равными нулю, чтобы суммарный геодезический поворот отсчитывался от нуля.

Перейдем к экспонентам половинных поворотов:

$$\exp\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} = \left[\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, 0, 0\right]; \exp\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} = \left[\cos\frac{\gamma}{2}, 0, \sin\frac{\gamma}{2}, 0\right]; \exp\frac{\boldsymbol{\chi}}{2} = \left[\cos\frac{\chi}{2}, 0, 0, \sin\frac{\chi}{2}\right]. \tag{5.48}$$

Половинный экспоненциальный кватернион суммарного поворота может быть вычислен по формуле:

$$\mathbf{qc} = \exp\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} \circ \exp\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \circ \exp\frac{\boldsymbol{\chi}}{2} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\chi}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\chi}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\chi}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\chi}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\chi}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\chi}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\chi}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\chi}{2} \end{bmatrix}. \tag{5.49}$$

Перейдем к определению постоянного кватерниона **xc**. Из формулы (5.47) следует:

$$\mathbf{xc} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{x}(0) - \mathbf{q}(0) \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{x}(0) \circ \mathbf{q}^{-1}(0). \tag{5.50}$$

Точка с географическими координатами γ, θ в неподвижной системе координат в соответствии с формулой (5.5) имеет декартовы координаты:

$$x_1 = R\cdot\sin\gamma\cdot\cos\theta; \quad x_2 = R\cdot\sin\theta; \quad x_3 = R\cdot\cos\gamma\cdot\cos\theta; \tag{5.51}$$

$${}_{\mathrm{X}}\mathbf{x}(0) = \left[0, \quad R\cdot\sin\gamma\cdot\cos\theta, \quad R\cdot\sin\theta, \quad R\cdot\cos\gamma\cdot\cos\theta\right]. \tag{5.52}$$

Вычисления показывают, что

$$\mathbf{q}(0) \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{x}(0) \circ \mathbf{q}^{-1}(0) = \left[0, \quad R\cdot\sin\gamma\cdot\cos\theta, \quad R\cdot\sin\theta, \quad R\cdot\cos\gamma\cdot\cos\theta\right]. \tag{5.53}$$

Таким образом, **xc** = [0, 0, 0, 0] = **O**. Следовательно, решение кинематических уравнений для данного случая будет иметь вид:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{qc} \circ \exp\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot t}{2}; \quad {}_{\mathrm{X}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{q}(t) \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{x}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t). \tag{5.54}$$

Контур будет замкнут, когда параметр достигнет значения

$$T = 2\cdot\pi/\langle\boldsymbol{\omega}\rangle. \tag{5.55}$$

Длина этого контура:

$$S = v\cdot T = 2\cdot\pi\cdot v/\langle\boldsymbol{\omega}\rangle. \tag{5.56}$$

Суммарный геодезический поворот:

$$\psi(T) = \ln\left\|\mathbf{q}(T)\right\| = \ln\left[\exp(T\cdot\omega)\right] = T\cdot\omega = 2\cdot\pi\cdot\omega/\langle\boldsymbol{\omega}\rangle. \tag{5.57}$$

Площадь поверхности сферы, ограниченная контуром:

$$F = R^2\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(1 - \omega/\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\right). \tag{5.58}$$

Рассмотрим несколько примеров (рис. 5.8). Сфера радиуса R = 5 см. Начало контура в точке γ =0; θ =0. Направление в сторону возрастания координаты γ, то есть χ = 0.

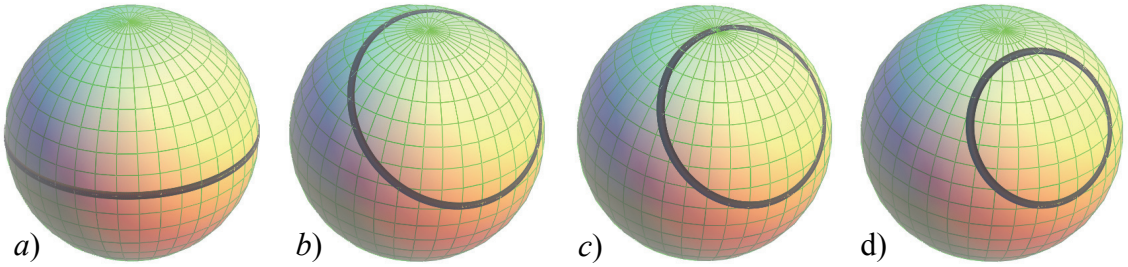


Рис. 5.8. Контуры постоянной кривизны на сфере $R = 5$ см:
a) $\omega = 0$; *b*) $\omega = 0.15$; *c*) $\omega = 0{,}2$; *d*) $\omega = 4/15 \approx 0{,}267$

Постоянный кватернион **qc** в данном случае таков:

$$\mathbf{qc} = [1, 0, 0, 0]. \tag{5.59}$$

Принимаем $v = 1$. В этом случае геодезическая кривизна контура равна ω.

Результаты расчетов приведены в таблице. В ней обозначено:

ω – геодезическая кривизна контура; $\langle\omega\rangle$ – полная кривизна контура; r – истинный радиус контура; ψ – суммарный геодезический поворот; S – длина контура; F – площадь сферической поверхности, охваченной контуром.

Таблица результатов расчета

Вариант	ω	$\langle\omega\rangle$	r	ψ	S	F
a)	0,000	0,200	5,000	0,000	31,416	157,080
b)	0,150	0,250	4,000	3,770	25,133	62,832
c)	0,200	0,283	3,536	4,443	22,214	46,008
d)	0,267	0,333	3,000	5,027	18,850	31,416

5.8. Полигоны на сфере

Представим себе, что на сфере радиуса R обозначены и последовательно пронумерованы числами 0, 1, 2, ..., n $n + 1$ точек, являющихся вершинами $n + 1$-стороннего замкнутого полигона (рис. 5.9). Стороны полигона последовательно соединяют вершины по дугам больших кругов. Стороны ориентированы так, что они составляют замкнутую цепочку с направлением обхода поверхности полигона против часовой стрелки и последовательно пронумерованы числами 0, 1, 2, ..., n. Длины сторон полигона измерены и составляют l_0, l_1, l_2, ..., l_n. Углы поворота полигона или внешние углы полигона (то есть углы между касательной в начале данной стороны и каса-

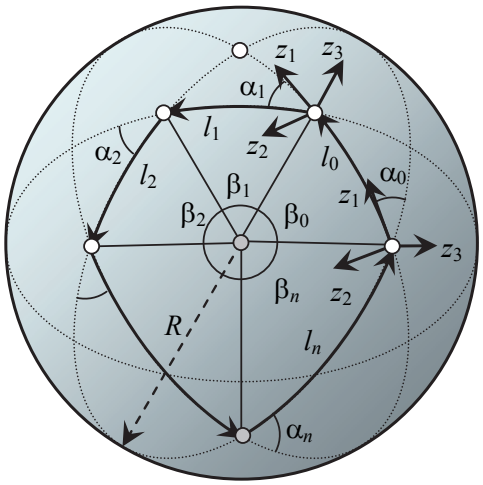


Рис. 5.9. Полигон на сфере

тельной в конце предыдущей стороны полигона) тоже измерены и составляют α_0, α_1, α_2, ..., α_n. Требуется установить зависимости между углами поворота полигона и длинами его сторон.

В зависимости от длин сторон полигона и от величин его внешних углов существует много разновидностей полигонов на сфере. Вариабельность этой проблемы даже для случая треугольников весьма велика. Мы же ограничимся рассмотрением выпуклых полигонов, то есть таких, которые полностью находятся слева от большой окружности, являющейся продолжением стороны полигона. Эта закономерность должна соблюдаться для каждой из его сторон.

Расположим в начале и конце каждой стороны полигона декартовы реперы так, чтобы орт номер 1 совпадал с касательной к стороне полигона, орт номер 3 представлял внешнюю нормаль к сфере, а орт номер 2 образовывал бы с предыдущими двумя ортами правую тройку. Таким образом, введены в рассмотрение $2\cdot(n+1)$ декартовых реперов, каждому из которых можно поставить в соответствие нормированный половинный экспоненциальный кватернион. Введем для этих кватернионов, представленных в неподвижной системе координат, обозначения: ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{qb}(0)$, ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{qb}(1)$, ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{qb}(2),\ldots,{}_{\mathrm{x}}\mathbf{qb}(n)$ – для кватернионов, соответствующих реперам, находящимся в начале сторон полигона; ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{qe}(0)$, ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{qe}(1)$, ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{qe}(2)$, ..., ${}_{\mathrm{x}}\mathbf{qe}(n)$ – для кватернионов, соответствующих реперам, находящимся в конце сторон полигона.

Введем в рассмотрение нормированные половинные экспоненциальные кватернионы углов поворота полигона в его вершинах, заданные в подвижной системе координат:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q\alpha}(k)=\left[\cos\frac{\alpha_k}{2};\,0;\,0;\,\sin\frac{\alpha_k}{2}\right]\quad(k=0,1,\ldots,n), \tag{5.60}$$

и половинные экспоненциальные кватернионы искривления сторон полигона:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q\beta}(k)=\left[\cos\frac{\beta_k}{2};\,0;\,\sin\frac{\beta_k}{2};\,0\right]\quad(k=0,1,\ldots,n), \tag{5.61}$$

где

$$ \beta_k=l_k/R\quad(k=0,1,\ldots,n). \tag{5.62}$$

В случае выпуклых полигонов углы α и β меняются в пределах от 0 до π. При помощи кватернионов (5.60) и (5.61) устанавливается связь между кватернионами ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}$ и ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{qe}$:

$$\begin{aligned} &{}_{\mathrm{X}}\mathbf{qe}(k)={}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(k)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q\beta}(k)\qquad(k=0,\,1,\ldots,n);\\ &{}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(k)={}_{\mathrm{X}}\mathbf{qe}(k-1)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q\alpha}(k)\quad(k=1,\,2,\ldots,n);\quad {}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(0)={}_{\mathrm{X}}\mathbf{qe}(n)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q\alpha}(0). \end{aligned} \tag{5.63}$$

Пусть известен кватернион ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(0)$. Тогда кватернион ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(1)$ может быть вычислен по формуле:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(1)={}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(0)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q\beta}(0)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q\alpha}(1), \tag{5.64}$$

кватернион ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{qb}(2)$ – по формуле:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{qb}(2) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{qb}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(2), \tag{5.65} $$

кватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{qb}(k)$ – по формуле:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{qb}(k) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{qb}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(2) \circ \ldots \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(k-1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(k). \tag{5.66} $$

Продолжая это построение, получим:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{qb}(0) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{qb}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(2) \circ \ldots \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(n) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(0). \tag{5.67} $$

Из этой формулы следует:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(2) \circ \ldots \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(n) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(0) = -\mathbf{i}. \tag{5.68} $$

Заметим, что при пользовании половинными экспоненциальными кватернионами тождественное преобразование осуществляется кватернионом – **i**. Умножая обе части равенства (5.68) слева на ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(0)$, а справа на ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(0)^{-1}$, получим более совершенную запись:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(0) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(1) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(1) \circ \ldots \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(n) \circ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(n) = -\mathbf{i}. \tag{5.69} $$

Этот прием показывает, что в левой части равенства можно выполнять циклическую перестановку сомножителей. Формула (5.69) соответствует нескольким зависимостям, которые должны соблюдаться между углами α_0, α_1, α_1, ..., α_n и β_0, β_1, β_2, ..., β_n. Формально мы видим четыре зависимости – по одной для каждого компонента кватерниона. На самом деле среди них только три независимых, поскольку формулы выписаны для нормированных кватернионов. Это – основные зависимости, которые связывают углы и стороны замкнутого полигона на сфере. Они могут быть использованы в геодезии для контроля измеренных величин, для последующей разгонки невязок измерений и для других целей.

5.9. Замыкание полигона на сфере

В частности, эти зависимости могут быть использованы для замыкания разомкнутых полигонов на сфере (рис. 5.10).

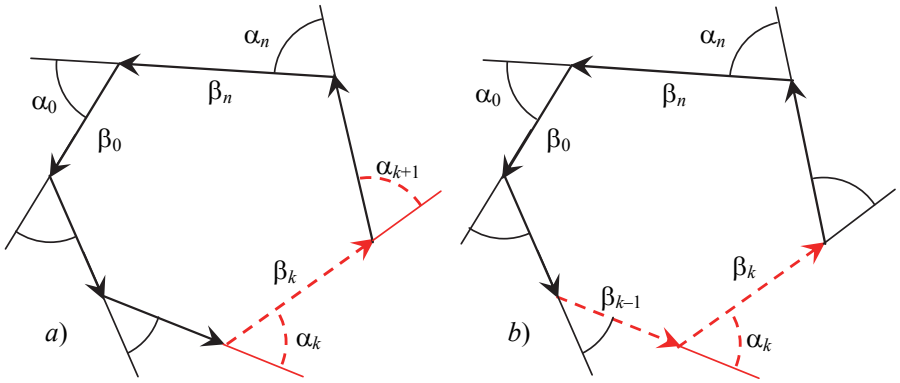


Рис. 5.10. Два вида замыкания полигона на сфере: *a* – определение стороны и прилегающих углов; *b* – определение угла и прилегающих сторон

Поскольку кватернионная зависимость (5.69) содержит в себе три независимых скалярных зависимости, из нее можно определить три независимые величины. В частности, можно определить информацию, содержащуюся в любых трех стоящих подряд сомножителях зависимости (5.69). Каждый сомножитель определяет либо угол α поворота полигона в вершине, либо угол β, под которым видна сторона полигона из центра сферы. Возможны два варианта выбора кватернионов-сомножителей.

Первый вариант:

$$\mathbf{q\alpha}(k) \circ_{\mathbf{Y}} \mathbf{q\beta}(k) \circ_{\mathbf{Y}} \mathbf{q\alpha}(k+1) = \mathbf{B}(k) \tag{5.70}$$

можно трактовать как определение стороны и прилегающих к ней углов. Здесь введен кватернион $\mathbf{B}(k)$ для обозначения произведения трех указанных выше кватернионов.

При известном $\mathbf{B}(k)$ равенство (5.70) можно разрешить относительно тригонометрических функций углов $\boldsymbol{\alpha}(k); \boldsymbol{\beta}(k); \boldsymbol{\alpha}(k+1)$, а затем определить углы. Подставляя в равенство (5.70) выражения для сомножителей в соответствии с формулами (5.60) и (5.61) и пользуясь правилом умножения кватернионов, запишем:

$$\left[\cos\frac{\beta_k}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_{k+1}+\alpha_k}{2}; \sin\frac{\beta_k}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{2}; \sin\frac{\beta_k}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{2}; \cos\frac{\beta_k}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_{k+1}+\alpha_k}{2}\right] = \mathbf{B}(k). \tag{5.71}$$

Складывая попарно квадраты компонентов кватерниона, получим формулы для квадратов синуса и косинуса половинного угла β_k:

$$\cos^2\frac{\beta_k}{2} = B_0^2(k) + B_3^2(k); \quad \sin^2\frac{\beta_k}{2} = B_1^2(k) + B_2^2(k). \tag{5.72}$$

Из этих равенств следует:

$$\cos\beta_k = B_0^2(k) - B_1^2(k) - B_2^2(k) + B_3^2(k); \tag{5.73}$$

$$\sin\beta_k = 2\cdot\sqrt{\left[B_0^2(k) + B_3^2(k)\right]\cdot\left[B_1^2(k) + B_2^2(k)\right]}. \tag{5.74}$$

В формуле (5.74) корень квадратный взят со знаком плюс, поскольку обход полигона выполняется против часовой стрелки, то есть угол β положительный, а угловая мера стороны выпуклого полигона не превышает π, то есть синус этого угла тоже положительный.

Комбинируя попарные произведения компонентов кватерниона $\mathbf{B}(k)$, получаем формулы для тригонометрических функций углов, связанных со сторонами полигона:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_k &= \frac{B_0(k)\cdot B_2(k) + B_1(k)\cdot B_3(k)}{\sqrt{\left[B_0^2(k) + B_3^2(k)\right]\cdot\left[B_1^2(k) + B_2^2(k)\right]}};\\
\sin\alpha_k &= \frac{B_2(k)\cdot B_3(k) - B_0(k)\cdot B_1(k)}{\sqrt{\left[B_0^2(k) + B_3^2(k)\right]\cdot\left[B_1^2(k) + B_2^2(k)\right]}};
\end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\cos\alpha_{k+1} = \frac{B_0(k)\cdot B_2(k) - B_1(k)\cdot B_3(k)}{\sqrt{\left[B_0^2(k)+B_2^2(k)\right]\cdot\left[B_1^2(k)+B_3^2(k)\right]}};$$
$$\sin\alpha_{k+1} = \frac{B_0(k)\cdot B_1(k) + B_2(k)\cdot B_3(k)}{\sqrt{\left[B_0^2(k)+B_2^2(k)\right]\cdot\left[B_1^2(k)+B_3^2(k)\right]}}. \qquad (5.76)$$

Величины углов можно узнать через их косинусы и синусы при помощи функции atan2:

$$\alpha = \operatorname{atan2}(\cos\alpha;\ \sin\alpha). \qquad (5.77)$$

Для определения кватерниона $\mathbf{B}(k)$ возвратимся к зависимости (5.69). Путем циклической перестановки сомножителей в левой части зависимости можно привести ее к виду:

$$\mathbf{B}(k)\circ\mathbf{Qb}(k) = -\mathbf{i}, \qquad (5.78)$$

где обозначено:

$$\mathbf{Qb}(k) = {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(k+1)\circ\ldots\circ{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(n)\circ{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(n)\circ{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(0)\circ{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(0)\circ\ldots\circ{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(k-1). \qquad (5.79)$$

Из формулы (5.78) находим:

$$\mathbf{B}(k) = -\mathbf{Qb}^{-1}(k). \qquad (5.80)$$

Заметим, что $\mathbf{Qb}(k)$ – нормированный кватернион как произведение нормированных кватернионов, а значит, обращение при его вычислении можно заменить на сопряжение и в итоге равенство (5.80) представить покомпонентно следующим образом:

$$B_0(k) = -Qb_0(k);\quad B_1(k) = Qb_1(k);\quad B_2(k) = Qb_2(k);\quad B_3(k) = Qb_3(k). \qquad (5.81)$$

Второй вариант:

$$\mathbf{q\beta}(k-1)\circ{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\alpha}(k)\circ{}_{\mathbf{Y}}\mathbf{q\beta}(k) = \mathbf{A}(k) \qquad (5.82)$$

можно трактовать как определение угла и прилегающих к нему сторон.

Здесь, как и в первом варианте, введен кватернион $\mathbf{A}(k)$ для обозначения произведения трех кватернионов из формулы (5.82).

При известном $\mathbf{A}(k)$ равенство (5.82) можно разрешить относительно тригонометрических функций углов $\boldsymbol{\beta}(k-1);\ \boldsymbol{\alpha}(k);\ \boldsymbol{\beta}(k)$ и, при необходимости, относительно самих углов. Как и в первом варианте, подставляя в равенство (5.82) выражения для сомножителей в соответствии с формулами (5.60) и (5.61) и пользуясь правилом умножения кватернионов, запишем:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha_k}{2}\cdot\cos\frac{\beta_k+\beta_{k-1}}{2} \\ -\sin\frac{\alpha_k}{2}\cdot\sin\frac{\beta_k-\beta_{k-1}}{2} \\ \cos\frac{\alpha_k}{2}\cdot\sin\frac{\beta_k+\beta_{k-1}}{2} \\ \sin\frac{\alpha_k}{2}\cdot\cos\frac{\beta_k-\beta_{k-1}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(k). \tag{5.83}$$

Складывая попарно квадраты компонентов кватерниона, получим формулы для квадратов синуса и косинуса половинного угла α_k:

$$\cos^2\frac{\alpha_k}{2} = A_0^2(k) + A_2^2(k); \quad \sin^2\frac{\alpha_k}{2} = A_1^2(k) + A_3^2(k). \tag{5.84}$$

Из этих равенств следует:

$$\cos\alpha_k = \cos^2\frac{\alpha_k}{2} - \sin^2\frac{\alpha_k}{2} = A_0^2(k) - A_1^2(k) + A_2^2(k) - A_3^2(k); \tag{5.85}$$

$$\sin\alpha_k = 2\cdot\sqrt{\left[A_0^2(k) + A_2^2(k)\right]\cdot\left[A_1^2(k) + A_3^2(k)\right]}. \tag{5.86}$$

Знак перед квадратным корнем взят положительным, поскольку для выпуклых полигонов угол α_k меняется от нуля до π, а, значит, синус его положителен.

Комбинируя попарные произведения компонентов кватерниона $\mathbf{A}(k)$, получаем формулы для тригонометрических функций углов, связанных со сторонами полигона:

$$\begin{aligned} \cos\beta_k &= \frac{A_2(k)\cdot A_1(k) + A_0(k)\cdot A_3(k)}{\sqrt{\left[A_0^2(k) + A_2^2(k)\right]\cdot\left[A_1^2(k) + A_3^2(k)\right]}}; \\ \sin\beta_k &= \frac{A_2(k)\cdot A_3(k) - A_0(k)\cdot A_1(k)}{\sqrt{\left[A_0^2(k) + A_2^2(k)\right]\cdot\left[A_1^2(k) + A_3^2(k)\right]}}; \end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned} \cos\beta_{k-1} &= \frac{A_0(k)\cdot A_3(k) - A_2(k)\cdot A_1(k)}{\sqrt{\left[A_0^2(k) + A_2^2(k)\right]\cdot\left[A_1^2(k) + A_3^2(k)\right]}}; \\ \sin\beta_{k-1} &= \frac{A_0(k)\cdot A_1(k) + A_2(k)\cdot A_3(k)}{\sqrt{\left[A_0^2(k) + A_2^2(k)\right]\cdot\left[A_1^2(k) + A_3^2(k)\right]}}. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Величины углов можно определить через их косинусы и синусы по формуле (5.77).

Для определения кватерниона $\mathbf{A}(k)$ рассмотрим зависимость (5.69). Путем циклической перестановки сомножителей в левой части зависимости можно получить:

$$\mathbf{A}(k)\circ\mathbf{Qa}(k) = -\mathbf{i}, \tag{5.89}$$

где обозначено:

$$\mathbf{Qa}(k) = {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(k+1)\circ\ldots\circ {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(n)\circ {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(n)\circ {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(0)\circ {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(0)\circ\ldots\circ {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(k-1)\,. \tag{5.90}$$

Из формулы (5.89) находим:

$$\mathbf{A}(k) = -\mathbf{Qa}^{-1}(k)\,. \tag{5.91}$$

Заметим, что $\mathbf{Qa}(k)$ – нормированный кватернион как произведение нормированных кватернионов, а значит, обращение при его вычислении можно заменить на сопряжение и в итоге равенство (5.91) представить покомпонентно следующим образом:

$$A_0(k) = -Qa_0(k);\quad A_1(k) = Qa_1(k);\quad A_2(k) = Qa_2(k);\quad A_3(k) = Qa_3(k)\,. \tag{5.92}$$

Введя новое обозначение $\mathbf{q}(k)$, на основании формул (5.60) и (5.61) получим:

$${}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}(k) = {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(k)\circ {}_{\mathrm{y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(k) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha_k}{2}\cdot\cos\frac{\beta_k}{2} \\ -\sin\frac{\alpha_k}{2}\cdot\sin\frac{\beta_k}{2} \\ \cos\frac{\alpha_k}{2}\cdot\sin\frac{\beta_k}{2} \\ \sin\frac{\alpha_k}{2}\cdot\cos\frac{\beta_k}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha_k+\beta_k}{2} \\ \cos\frac{\alpha_k+\beta_k}{2} \\ \sin\frac{\alpha_k+\beta_k}{2} \\ \sin\frac{\alpha_k+\beta_k}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha_k-\beta_k}{2} \\ -\cos\frac{\alpha_k-\beta_k}{2} \\ -\sin\frac{\alpha_k-\beta_k}{2} \\ \sin\frac{\alpha_k-\beta_k}{2} \end{bmatrix}. \tag{5.93}$$

В этих обозначениях формула (5.69) имеет вид:

$$\mathbf{q}(0)\circ\mathbf{q}(1)\circ\ldots\circ\mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(0)\circ\mathbf{Q}(0) = -\mathbf{i}\,, \tag{5.94}$$

где

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{q}(1)\circ\mathbf{q}(2)\circ\ldots\circ\mathbf{q}(n)\,. \tag{5.95}$$

Из равенств (5.93) следует:

$$\begin{aligned} &\cos\alpha_k = q_0^2(k) - q_1^2(k) + q_2^2(k) - q_3^2(k); \quad \cos\beta_k = q_0^2(k) - q_1^2(k) - q_2^2(k) + q_3^2(k); \\ &\sin\alpha_k = 2\cdot\left[q_0(k)\cdot q_3(k) - q_1(k)\cdot q_2(k)\right]; \quad \sin\beta_k = 2\cdot\left[q_0(k)\cdot q_2(k) - q_1(k)\cdot q_3(k)\right]; \end{aligned} \tag{5.96}$$

а также:

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\alpha_k+\beta_k}{2} = q_0(k) + q_1(k); \quad \cos\frac{\alpha_k-\beta_k}{2} = q_0(k) - q_1(k); \\ &\sin\frac{\alpha_k+\beta_k}{2} = q_3(k) + q_2(k); \quad \sin\frac{\alpha_k-\beta_k}{2} = q_3(k) - q_2(k), \end{aligned} \tag{5.97}$$

откуда легко определяются:

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\alpha_k}{2} = \sqrt{q_0^2(k) + q_2^2(k)}; \quad \cos\frac{\beta_k}{2} = \sqrt{q_0^2(k) + q_3^2(k)}; \\ &\sin\frac{\alpha_k}{2} = \pm\sqrt{q_1^2(k) + q_3^2(k)}; \quad \sin\frac{\beta_k}{2} = \sqrt{q_1^2(k) + q_2^2(k)}. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Здесь использована зависимость:

$$q_0^2(k)+q_1^2(k)+q_2^2(k)+q_3^2(k)=1. \tag{5.99}$$

Тангенсы половинных углов определяются по формулам:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_k}{2}=\pm\sqrt{\frac{q_1^2(k)+q_3^2(k)}{q_0^2(k)+q_2^2(k)}};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta_k}{2}=\sqrt{\frac{q_1^2(k)+q_2^2(k)}{q_0^2(k)+q_3^2(k)}}. \tag{5.100}$$

Тангенсы полусуммы и полуразности углов определяются по формулам:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}=\frac{q_3(k)+q_2(k)}{q_0(k)+q_1(k)};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_k-\beta_k}{2}=\frac{q_3(k)-q_2(k)}{q_0(k)-q_1(k)}. \tag{5.101}$$

Следует, однако, помнить, что компоненты кватерниона $\mathbf{q}(k)$ не являются независимыми.

Из формулы (5.94) следует:

$$\mathbf{q}(0)=-\mathbf{Q}^{-1}(0). \tag{5.102}$$

Базируясь на формуле (5.102), определим функции углов, связанные с нулевой стороной многоугольника:

$$\begin{aligned}&\cos\alpha_0=Q_0^2-Q_1^2+Q_2^2-Q_3^2; && \cos\beta_0=Q_0^2-Q_1^2-Q_2^2+Q_3^2;\\ &\sin\alpha_0=-2\cdot\left[Q_0\cdot Q_3+Q_1\cdot Q_2\right]; && \sin\beta_0=-2\cdot\left[Q_0\cdot Q_2+Q_1\cdot Q_3\right];\end{aligned} \tag{5.103}$$

$$\begin{aligned}&\cos\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}=Q_0-Q_1; && \cos\frac{\alpha_k-\beta_k}{2}=Q_0+Q_1;\\ &\sin\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}=-Q_2-Q_3; && \sin\frac{\alpha_k-\beta_k}{2}=Q_2-Q_3;\end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\begin{aligned}&\cos\frac{\alpha_0}{2}=\sqrt{Q_0^2+Q_2^2}; && \cos\frac{\beta_0}{2}=\sqrt{Q_0^2+Q_3^2};\\ &\sin\frac{\alpha_0}{2}=\sqrt{Q_1^2+Q_3^2}; && \sin\frac{\beta_0}{2}=\sqrt{Q_1^2+Q_2^2};\end{aligned} \tag{5.105}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}=\sqrt{\frac{Q_1^2+Q_3^2}{Q_0^2+Q_2^2}};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2}=\sqrt{\frac{Q_1^2+Q_2^2}{Q_0^2+Q_3^2}}; \tag{5.106}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}=-\frac{Q_2+Q_3}{Q_0-Q_1};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}=\frac{Q_2-Q_3}{Q_0+Q_1}. \tag{5.107}$$

5.10. Правильный многоугольник на сфере

В качестве примера рассмотрим правильный n +1-угольник на сфере, т. е. замкнутый полигон с n +1 равными между собой углами поворота полигона и n + 1 равными между собой сторонами (рис. 5.11). Для его конкретизации и привязки к географиче-

ской и неподвижной системам координат будем полагать, что все его вершины лежат на параллели, соответствующей широте θ, вершина полигона с номером 0 находится на нулевом меридиане в точке с географическими координатами (0, θ), сторона полигона с номером 0 берет свое начало в вершине полигона с номером 0, а заканчивается в угле полигона с номером 1, который находится в точке с географическими координатами $\left(\frac{2\cdot\pi}{n+1};\theta\right)$. Продолжая построение далее, получим полигон, в котором сторона с номером n замыкает его, заканчиваясь в вершине с номером 0. Обход полигона выполняется против часовой стрелки, если смотреть со стороны северного полюса. Полигон охватывает участок поверхности сферы, содержащий северный полюс.

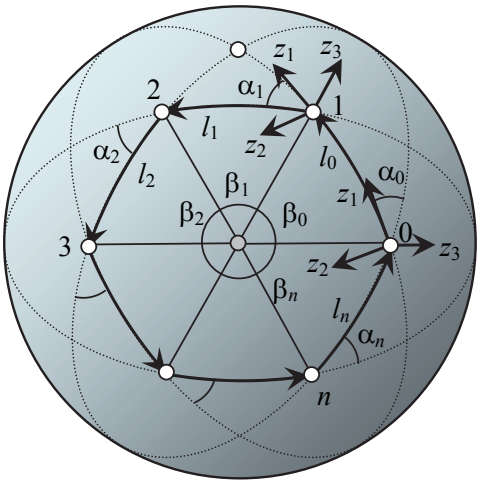


Рис. 5.11. Правильный n + 1 -угольник на сфере

Как следует из вышесказанного, на сфере радиуса R можно построить целое семейство различных правильных n + 1-угольников, являющихся функциями одной действительной переменной. В данном случае в качестве этой действительной переменной выбрана широта θ, на которой расположены вершины правильного многоугольника. Диапазон, в котором может изменяться широта, таков:

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}. \qquad (5.108)$$

При значении θ, близком к верхней грани диапазона, имеем многоугольник малой площади, охватывающий северный полюс. При значении θ = 0 имеем многоугольник, периметр которого совпадает с экватором, а площадь равна площади полусферы. При значении θ, близком к нижней грани диапазона, имеем многоугольник, покрывающий почти всю сферу, за исключением окрестности южного полюса.

Координаты вершины с номером k рассматриваемого полигона в неподвижной системе, определенной в разделе 5.1, таковы:

$$\mathbf{x}(k)=\left[\cos\theta\cdot\sin\left(2\cdot k\cdot\lambda\right);\sin\theta;\cos\theta\cdot\cos\left(2\cdot k\cdot\lambda\right)\right]\cdot R \quad (k=0,1,...,n), \qquad (5.109)$$

где $\lambda=\pi/(n+1)$.

Каждая сторона полигона является дугой большой окружности. Косинус и синус половины угла, под которым видна сторона полигона из центра сферы, даются формулами:

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda};\quad \sin\frac{\beta}{2}=\cos\theta\cdot\sin\lambda, \qquad (5.110)$$

а сам угол может быть вычислен так:

$$\beta = 2 \cdot \arcsin\left(\cos\theta \cdot \sin\lambda\right). \tag{5.111}$$

Как было сказано в разделе 5.4, каждая большая окружность на сфере может быть определена направляющими косинусами нормали к плоскости, в которой лежит эта окружность. Косинусы углов между нормалью к окружности, определяющей сторону с номером k, и осями неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 даются формулами:

$$\begin{aligned} c_1(k) &= -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}\cdot\sin\left[\left(2\cdot k+1\right)\cdot\lambda\right]; \\ c_2(k) &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}\cdot\cos\lambda; \qquad (k=0,1,...,n). \\ c_3(k) &= -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}\cdot\cos\left[\left(2\cdot k+1\right)\cdot\lambda\right]. \end{aligned} \tag{5.112}$$

Что касается углов поворота полигона в его вершинах, то формулы для определения косинусов и синусов половинных углов таковы:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\theta\cdot\sin\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}, \tag{5.113}$$

а сам угол может быть вычислен по формуле:

$$\alpha = 2\cdot\arg\left(\cos\lambda + i\cdot\cos\theta\cdot\sin\lambda\right) = 2\cdot\operatorname{atan2}\left(\cos\lambda;\cos\theta\cdot\sin\lambda\right). \tag{5.114}$$

Для этого полигона нормированные половинные экспоненциальные кватернионы углов поворота полигона в его вершинах, заданные в подвижной системе координат, не зависят от номера вершины и имеют вид:

$${}_{Y}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha} = \left[\frac{\cos\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}; 0; 0; \frac{\sin\theta\cdot\sin\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}\right], \tag{5.115}$$

а нормированные половинные экспоненциальные кватернионы искривления сторон полигона в подвижной системе координат тоже не зависят от номера стороны и вычисляются по формулам:

$${}_{Y}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta} = \left[\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}; 0; \cos\theta\cdot\sin\lambda; 0\right]. \tag{5.116}$$

Кватернион $\mathbf{q}$, определяемый формулой (5.93), в подвижной системе координат имеет вид:

$${}_{Y}\mathbf{q} = \left[\cos\lambda; -\frac{\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}; \frac{\cos\theta\cdot\cos\lambda\cdot\sin\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}; \sin\theta\cdot\sin\lambda\right]. \tag{5.117}$$

Эти же кватернионы в неподвижной системе координат выражаются так:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(k)=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}\cdot\begin{bmatrix}1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda\\ -\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\left[\left(2\cdot k+1\right)\cdot\lambda\right]\cdot\sin\lambda\\ \cos^2\theta\cdot\cos\lambda\cdot\sin\lambda\\ -\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos\left[\left(2\cdot k+1\right)\cdot\lambda\right]\cdot\sin\lambda\end{bmatrix}\ (k=0,1,...,n);\ (5.118) $$

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(k)=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta\cdot\sin^2\lambda}}\cdot\begin{bmatrix}\cos\lambda\\ \sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin(2\cdot k\cdot\lambda)\cdot\sin\lambda\\ \sin^2\theta\cdot\sin\lambda\\ \sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos(2\cdot k\cdot\lambda)\cdot\sin\lambda\end{bmatrix}\quad(k=0,1,...,n);\qquad(5.119) $$

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}=\left[\cos\lambda;\,0;\,\sin\lambda;\,0\right]. \qquad (5.120) $$

Кватернион **q**, определяемый формулой (5.120), не зависит от номера стороны многоугольника и имеет очень простой вид. Векторная часть этого кватерниона совпадает с осью сферы и направлена в сторону северного полюса.

Частный случай. Равносторонний прямоугольный треугольник. В данном случае $n = 2;\ \lambda=\frac{\pi}{3};\ \alpha=\beta=\frac{\pi}{2};\ \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3};\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3};\ \theta\approx 0,615$.

Координаты вершин рассматриваемого треугольника в неподвижной системе координат таковы:

$$ \mathbf{x}(0)=\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]\cdot R;\ \mathbf{x}(1)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]\cdot R;\ \mathbf{x}(2)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]\cdot R. \quad (5.121) $$

Косинусы углов $\mathbf{c}(k)$ между нормалью к окружности, определяющей сторону с номером k, и осями неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 таковы:

$$ \mathbf{c}(0)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{3}\right];\ \mathbf{c}(1)=\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right];\ \mathbf{c}(2)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]. \qquad (5.122) $$

Нормированные половинные экспоненциальные кватернионы углов поворота и искривления сторон полигона в подвижной системе координат таковы:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right];\quad {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]. \qquad (5.123) $$

Кватернион **q**, определяемый формулой (5.93), в подвижной системе координат имеет вид:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}=\left[\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]. \qquad (5.124) $$

Эти же кватернионы в неподвижной системе координат имеют вид:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(0)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right];\ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(1)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{3}}{3}\right];\ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(2)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right]; \quad (5.125) $$

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(0)=\left[\frac{1}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{6}\right];\ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(1)=\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{12}\right];\ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(2)=\left[\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{12}\right]; \quad (5.126) $$

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}=\left[\frac{1}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right]. \quad (5.127) $$

5.11. Соотношение углов в сферическом треугольнике

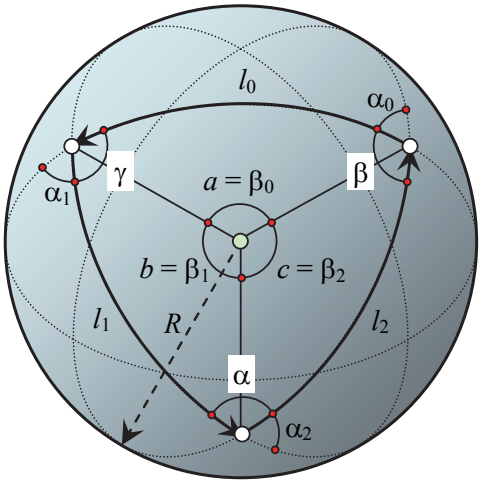


Рис. 5.12. Сферический треугольник

Представляет методический интерес вывод формул сферической геометрии с использованием кватернионов. В классической сферической тригонометрии используют внутренние углы треугольника, обозначаемые греческими буквами α, β, γ, и углы, под которыми видны противолежащие стороны треугольника из центра сферы, обозначаемые латинскими буквами a, b, c. В данной работе вместо внутренних углов использованы внешние углы или углы поворота полигона (в данном случае треугольника), обозначаемые α_0, α_1, α_2, и углы, под которыми видны стороны треугольника из центра сферы, обозначаемые β_0, β_1, β_2 (рис. 5.12). Описанные выше величины связаны между собой формулами:

$$ a=\beta_0;\ b=\beta_1;\ c=\beta_2;\ \alpha=\pi-\alpha_2;\ \beta=\pi-\alpha_0;\ \gamma=\pi-\alpha_1. \quad (5.128) $$

Запишем основное кватернионное равенство (5.68) для случая треугольника:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(0)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(1)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(1)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(2)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}(2)\circ{}_{\mathrm{Y}}\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}(0)=-\mathbf{i}. \quad (5.129) $$

Используя обозначения раздела 5.9, эту формулу можно переписать так:

$$ \mathbf{A}(1)\circ\mathbf{B}(2)=-\mathbf{i}. \quad (5.130) $$

Подставляя в эту формулу выражения кватернионов $\mathbf{q}\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}$ в соответствии с формулами (5.60) и (5.61) и пользуясь покомпонентными зависимостями, подобными (5.92):

$$ A_0(1)=-B_0(2);\quad A_1(1)=B_1(2);\quad A_2(1)=B_2(2);\quad A_3(1)=B_3(2), \quad (5.131) $$

получим фундаментальную систему зависимостей между углами и сторонами сферического треугольника:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha_1}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1+\beta_0}{2} &= -\cos\frac{\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_0+\alpha_2}{2};\\
-\sin\frac{\alpha_1}{2}\cdot\sin\frac{\beta_1-\beta_0}{2} &= \sin\frac{\beta_2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_0-\alpha_2}{2};\\
\cos\frac{\alpha_1}{2}\cdot\sin\frac{\beta_1+\beta_0}{2} &= \sin\frac{\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_0-\alpha_2}{2};\\
\sin\frac{\alpha_1}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1-\beta_0}{2} &= \cos\frac{\beta_2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_0+\alpha_2}{2}.
\end{aligned} \tag{5.132}$$

Производя циклическую замену индексов углов α_0, α_1, α_2 и β_0, β_1, β_2, можно получить еще два набора подобных зависимостей. Эти зависимости называются *формулами Деламбра* (*Гаусса*). Из них вытекают все остальные формулы сферической тригонометрии.

Проще всего получаются так называемые *аналогии Непера*:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_0-\alpha_2}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\beta_1+\beta_0}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_0+\alpha_2}{2};\\
\operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_0-\alpha_2}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\beta_1-\beta_0}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_0+\alpha_2}{2};\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1-\beta_0}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\alpha_0+\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_1+\beta_0}{2};\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\cdot\sin\frac{\beta_1-\beta_0}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\alpha_0-\alpha_2}{2}\cdot\sin\frac{\beta_1+\beta_0}{2}.
\end{aligned} \tag{5.133}$$

Они вытекают из попарных отношений формул Деламбра (Гаусса). В новых обозначениях они выглядят более изящно, поскольку не содержат котангенсов. Циклическая замена индексов позволяет получить еще два набора подобных зависимостей.

Возводя в квадрат равенства (5.132), а затем, складывая и вычитая их в разных комбинациях, получим теорему косинусов углов:

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_0 - \sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_0\cdot\cos\beta_2 \tag{5.134}$$

и теорему косинусов сторон:

$$\cos\beta_2 = \cos\beta_0\cdot\cos\beta_1 - \sin\beta_0\cdot\sin\beta_1\cdot\cos\alpha_1. \tag{5.135}$$

Благодаря тому, что мы пользуемся внешними углами треугольника, формулы (5.134) и (5.135) выглядят идентично. При помощи циклической замены индексов можно получить другие представления теорем косинусов.

Выражение (5.134) можно переписать следующим образом:

$$\cos\beta_2 = \frac{\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1}{\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_0}. \tag{5.136}$$

Возводя левую и правую части этого равенства в квадрат и выполняя несложные преобразования, получим:

$$\sin^2\beta_2 = \frac{\Delta^2}{\sin^2\alpha_2 \cdot \sin^2\alpha_0}, \tag{5.137}$$

где

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_0 - \cos^2\alpha_1 + 2\cdot\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_0\cdot\cos\alpha_1. \tag{5.138}$$

Разделив левую и правую часть равенства (5.137) на $\sin^2\alpha_1$, получим:

$$\frac{\sin^2\beta_2}{\sin^2\alpha_1} = \frac{\Delta^2}{\sin^2\alpha_2 \cdot \sin^2\alpha_0 \cdot \sin^2\alpha_1}. \tag{5.139}$$

Выполняя циклическую замену индексов, приходим к выводу о том, что:

$$\frac{\sin^2\beta_0}{\sin^2\alpha_2} = \frac{\sin^2\beta_1}{\sin^2\alpha_0} = \frac{\sin^2\beta_2}{\sin^2\alpha_1}, \tag{5.140}$$

поскольку циклическая замена индексов не изменяет правой части формулы (5.137). После извлечения квадратного корня из каждой составной части равенства (5.140), придем к теореме синусов:

$$\frac{\sin\beta_0}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_0} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_1}. \tag{5.141}$$

Выполняя подобные преобразования с выражением (5.135), получаем:

$$\sin^2\alpha_1 = \frac{D^2}{\sin^2\beta_0 \cdot \sin^2\beta_1}, \tag{5.142}$$

где

$$D^2 = 1 - \cos^2\beta_0 - \cos^2\beta_1 - \cos^2\beta_2 + 2\cdot\cos\beta_0\cdot\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2. \tag{5.143}$$

Подставляя (5.142) в правую часть формулы (5.139), придем к формуле:

$$\frac{\sin^2\beta_2}{\sin^2\alpha_1} = \frac{\sin^2\beta_0 \cdot \sin^2\beta_1 \cdot \Delta^2}{\sin^2\alpha_2 \cdot \sin^2\alpha_0 \cdot D^2}. \tag{5.144}$$

Учитывая равенства (5.140), получаем:

$$\frac{\sin^2\beta_2}{\sin^2\alpha_1} = \frac{D^2}{\Delta^2}. \tag{5.145}$$

Таким образом, мы установили, чему равно отношение синусов в теореме синусов.

$$\frac{\sin\beta_0}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_0} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_1} = \frac{D}{\Delta}. \tag{5.146}$$

Величины D и Δ определяются формулами (5.138) и (5.143). Эти величины можно выразить и более изящными формулами. Для этого введем в рассмотрение углы, предложенные в свое время Стьюди [11]:

$$\begin{array}{llll} 2\cdot\sigma = 2\cdot\pi-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2; & & 2\cdot s = 2\cdot\pi-\beta_0-\beta_1-\beta_2; \\ 2\cdot\sigma_0 = -\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2; & & 2\cdot s_0 = -\beta_0+\beta_1+\beta_2; \\ 2\cdot\sigma_1 = \alpha_0-\alpha_1+\alpha_2; & & 2\cdot s_1 = \beta_0-\beta_1+\beta_2; \\ 2\cdot\sigma_2 = \alpha_0+\alpha_1-\alpha_2; & & 2\cdot s_2 = \beta_0+\beta_1-\beta_2. \end{array} \qquad (5.147)$$

Прямой проверкой можно убедиться в том, что справедливы формулы:

$$D^2 = 4\cdot\sin s\cdot\sin s_0\cdot\sin s_1\cdot\sin s_2; \quad \Delta^2 = 4\cdot\sin\sigma\cdot\sin\sigma_0\cdot\sin\sigma_1\cdot\sin\sigma_2. \qquad (5.148)$$

Теоремы половинного угла в обозначениях (5.148) выглядят так:

$$\sin\frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin s_0}{\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2}}; \quad \cos\frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_1\cdot\sin s_2}{\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin s_0}{\sin s_1\cdot\sin s_2}}, \qquad (5.149)$$

а теоремы половинной стороны – следующим образом:

$$\sin\frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sigma\cdot\sin\sigma_0}{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}}; \quad \cos\frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sigma_1\cdot\sin\sigma_2}{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sigma\cdot\sin\sigma_0}{\sin\sigma_1\cdot\sin\sigma_2}}. \qquad (5.150)$$

Путем циклической замены индексов можно получить синусы, косинусы и тангенсы всех половинных углов.

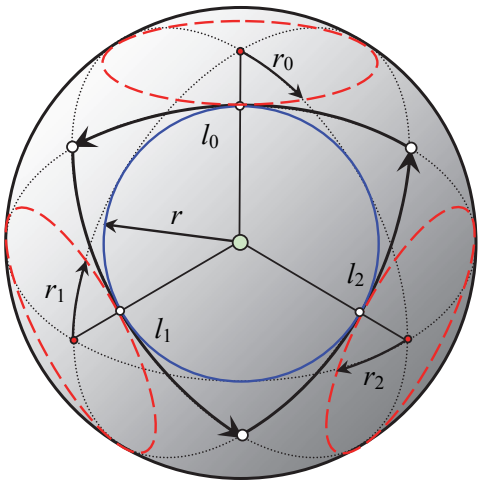


Рис. 5.13. Вписанная окружность с радиусом r и вписанные окружности извне треугольника с радиусами r_0, r_1, r_2

Приведем еще некоторые полезные формулы, в частности, для определения радиусов вписанных окружностей (рис. 5.13). Для радиуса вписанной окружности r:

$$\operatorname{tg} r = \frac{D}{2\cdot\sin s}. \qquad (5.151)$$

Для радиусов окружностей, вписанных извне треугольника и касающихся сторон треугольника с номерами 0, 1, 2:

$$\operatorname{tg} r_0 = \frac{D}{2\cdot\sin s_0}; \operatorname{tg} r_1 = \frac{D}{2\cdot\sin s_1}; \operatorname{tg} r_2 = \frac{D}{2\cdot\sin s_2}. \qquad (5.152)$$

Для радиуса описанной окружности:

$$\operatorname{ctg}\overline{R} = \sqrt{\frac{\cos s_0\cdot\cos s_1\cdot\cos s_2}{\cos s}}. \qquad (5.153)$$

Площадь сферического треугольника определяется формулой:

$$S = \varepsilon\cdot R^2, \qquad (5.154)$$

где ε – сферический избыток, который можно определить по формуле:

$$\varepsilon = 2 \cdot \sigma \tag{5.155}$$

или при помощи *формулы Уильера*:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{s_0}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{s_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{s_2}{2}}\,. \tag{5.156}$$

5.12. Разгонка невязок

Равенство (5.94) соблюдается, если углы поворота полигона и длины его сторон измерены точно. В действительности измерения имеют погрешности, и точного соблюдения равенства (5.94) достичь не удается.

В качестве угломерных инструментов, как правило, используются теодолиты. Теодолиты имеют среднеквадратичную погрешность измерения улов от 1 угловой секунды ($\Delta\alpha \approx 5 \cdot 10^{-6}$ радиана) до 1 угловой минуты ($\Delta\alpha \approx 3 \cdot 10^{-4}$ радиана). Погрешность измерения углов является абсолютной и не зависит от величины угла.

Расстояния измеряются мерными лентами, мерными проволоками (относительная погрешность $\Delta\beta \approx 2 \cdot 10^{-6}$), электрооптическими или лазерными дальномерами (относительная погрешность $\Delta\beta \approx 3 \cdot 10^{-6}$). Погрешность измерения расстояний, как правило, относительная, то есть, пропорциональная измеряемому расстоянию.

Пусть результаты замеров для углов поворота полигона – $*\alpha_0, *\alpha_1, *\alpha_2, \ldots, *\alpha_n$, а для относительных (по отношению к радиусу сферы R) длин сторон – $*\beta_0, *\beta_1, *\beta_2, \ldots, *\beta_n$. Эти данные можно откорректировать, воспользовавшись равенством (5.94).

Откорректированные данные будем получать по формулам:

$$\alpha_j = *\alpha_j + \Delta\alpha \cdot k\alpha_j; \quad \beta_j = *\beta_j \cdot (1 + \Delta\beta \cdot k\beta_j) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{5.157}$$

нужно только знать значения $k\alpha_j$, $k\beta_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Логично потребовать, чтобы сумма квадратов этих величин была минимальной. Кроме того, надо добиться, чтобы

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}(0) \circ \mathbf{q}(1) \circ \ldots \circ \mathbf{q}(n) = -\mathbf{i}\,. \tag{5.158}$$

Кватернион $\mathbf{Q}$ является функцией углов α_j, β_j ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$). Разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки $*\alpha_j$, $*\beta_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$), ограничившись первым членом ряда:

$$\mathbf{Q} = *\mathbf{Q} + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial *\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \cdot \Delta\alpha_j + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial *\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \cdot \Delta\beta_j\,, \tag{5.159}$$

где $*\mathbf{Q}$ – значение кватерниона $\mathbf{Q}$, при значениях углов $*\alpha_j$, $*\beta_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$); $\frac{\partial *\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j}$; $\frac{\partial *\mathbf{Q}}{\partial \beta_j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ – частные производные кватерниона $\mathbf{Q}$ при значениях углов $*\alpha_j$, $*\beta_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$); $\Delta\alpha_j$, $\Delta\beta_j$ – приращения углов, выражаемые через искомые коэффициенты $k\alpha_j$, $k\beta_j$ по формулам:

$$\Delta\alpha_j = \Delta\alpha \cdot k\alpha_j; \quad \Delta\beta_j = {}^*\beta_j \cdot \Delta\beta \cdot k\beta_j \quad (j = 0, 1, 2, ..., n). \tag{5.160}$$

Частные производные кватерниона **Q** по углу α_j или β_j можно вычислить как произведение кватернионов **q**(*j*) из формулы (5.158), если в ней кватернион **q**(*j*) заменить соответствующей производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} &= \mathbf{q}(0) \circ ... \circ \mathbf{q}(j-1) \circ \frac{\partial \mathbf{q}(j-1)}{\partial \alpha_j} \circ \mathbf{q}(j+1) \circ ... \circ \mathbf{q}(n); \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} &= \mathbf{q}(0) \circ ... \circ \mathbf{q}(j-1) \circ \frac{\partial \mathbf{q}(j-1)}{\partial \beta_j} \circ \mathbf{q}(j+1) \circ ... \circ \mathbf{q}(n), \end{aligned} \tag{5.161}$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{q}(j)}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos\frac{\beta_j}{2} \\ -\cos\frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin\frac{\beta_j}{2} \\ -\sin\frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin\frac{\beta_j}{2} \\ \cos\frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos\frac{\beta_j}{2} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{q}(j)}{\partial \beta_j} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\cos\frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin\frac{\beta_j}{2} \\ -\sin\frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos\frac{\beta_j}{2} \\ \cos\frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos\frac{\beta_j}{2} \\ -\sin\frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin\frac{\beta_j}{2} \end{bmatrix}. \tag{5.162}$$

Вот другое представление производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(0) \circ ... \circ \mathbf{q}(j-1) \circ [0,0,0,1] \circ \mathbf{q}(j) \circ \mathbf{q}(j+1) \circ ... \circ \mathbf{q}(n); \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(0) \circ ... \circ \mathbf{q}(j-1) \circ \mathbf{q}(j) \circ [0,0,1,0] \circ \mathbf{q}(j+1) \circ ... \circ \mathbf{q}(n). \end{aligned} \tag{5.163}$$

Потребуем, чтобы кватернион **Q**, определяемый формулой (5.159), после подстановки выражений из (5.160) был равен единичному. Из этого условия вытекает кватернионная зависимость, линейная относительно $k\alpha_j$, $k\beta_j$:

$$\mathbf{I} - {}^*\mathbf{Q} = \Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \cdot k\alpha_j + \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \cdot {}^*\beta_j \cdot k\beta_j, \tag{5.164}$$

то есть четыре скалярные зависимости. На самом деле, для практических нужд достаточно удовлетворить двум зависимостям, соответствующим второму и третьему компоненту кватерниона. С учетом этого можно сформулировать оптимизационную задачу для определения $k\alpha_j$, $k\beta_j$ (j = 0, 1, 2, ..., n):

минимизировать полусумму квадратов коэффициентов:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n} k\alpha_j^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n} k\beta_j^2 \tag{5.165}$$

при соблюдении условий:

$$
\begin{aligned}
{}^*Q_2 &= \Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot k\alpha_j + \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot {}^*\beta_j \cdot k\beta_j; \\
{}^*Q_3 &= \Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot k\alpha_j + \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot {}^*\beta_j \cdot k\beta_j.
\end{aligned}
\tag{5.166}
$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n} k\alpha_j^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n} k\beta_j^2 + \\
&+ \left[{}^*Q_2 - \Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot k\alpha_j - \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot {}^*\beta_j \cdot k\beta_j \right] \cdot \lambda_2 + \\
&+ \left[{}^*Q_3 - \Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot k\alpha_j - \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot {}^*\beta_j \cdot k\beta_j \right] \cdot \lambda_3.
\end{aligned}
\tag{5.167}
$$

Она содержит $2\cdot(n + 2)$ неизвестных, среди которых $2\cdot(n + 1)$ неизвестных $k\alpha_j$, $k\beta_j$ (j = 0, 1, 2, ..., n) и два множителя Лагранжа λ_2 и λ_3. Дифференцируя ее по каждому из неизвестных и приравнивая результат к нулю, получаем систему из $2\cdot(n + 2)$ линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&k\alpha_j \quad - \lambda_2 \cdot \Delta\alpha \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \quad - \lambda_3 \cdot \Delta\alpha \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 = 0 \quad (j = 0,1,2,...n); \\
&k\beta_j - \lambda_2 \cdot \Delta\beta \cdot {}^*\beta_j \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 - \lambda_3 \cdot \Delta\beta \cdot {}^*\beta_j \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 = 0 \quad (j = 0,1,2,...n);
\end{aligned}
\tag{5.168}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot k\alpha_j + \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot {}^*\beta_j \cdot k\beta_j &= {}^*Q_2; \\
\Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot k\alpha_j + \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot {}^*\beta_j \cdot k\beta_j &= {}^*Q_3.
\end{aligned}
\tag{5.169}
$$

Из уравнений (5.168) можно выразить коэффициенты $k\alpha_j$, $k\beta_j$ (j = 0, 1, 2, ..., n) через λ_2 и λ_3:

$$
\begin{aligned}
k\alpha_j &= \quad \lambda_2 \cdot \Delta\alpha \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \quad + \lambda_3 \cdot \Delta\alpha \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \quad (j = 0,1,2,...n); \\
k\beta_j &= \lambda_2 \cdot \Delta\beta \cdot {}^*\beta_j \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 + \lambda_3 \cdot \Delta\beta \cdot {}^*\beta_j \cdot \left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \quad (j = 0,1,2,...n).
\end{aligned}
\tag{5.170}
$$

Подставляя выражения для этих коэффициентов в уравнения (5.169), получим два уравнения для определения λ_2 и λ_3:

$$\begin{aligned} A_{22}\cdot\lambda_2 + A_{23}\cdot\lambda_3 &= {}^*Q_2;\\ A_{32}\cdot\lambda_2 + A_{33}\cdot\lambda_3 &= {}^*Q_3, \end{aligned} \tag{5.171}$$

где:

$$\begin{aligned} A_{22} &= \Delta\alpha^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_2\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_2 + \Delta\beta^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_2\cdot{}^*\beta_j^2\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_2;\\ A_{23} &= \Delta\alpha^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_2\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_3 + \Delta\beta^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_2\cdot{}^*\beta_j^2\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_3;\\ A_{32} &= \Delta\alpha^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_3\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_2 + \Delta\beta^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_3\cdot{}^*\beta_j^2\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_2;\\ A_{33} &= \Delta\alpha^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_3\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\alpha_j}\right)_3 + \Delta\beta^2\cdot\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_3\cdot{}^*\beta_j^2\cdot\left(\frac{\partial {}^*\mathbf{Q}}{\partial\beta_j}\right)_3. \end{aligned} \tag{5.172}$$

Решение системы уравнений (5.171) дается формулами:

$$\lambda_2 = D^{-1}\cdot(A_{33}\cdot{}^*Q_2 - A_{23}\cdot{}^*Q_3);\quad \lambda_3 = D^{-1}\cdot(A_{22}\cdot{}^*Q_3 - A_{32}\cdot{}^*Q_2), \tag{5.173}$$

где

$$D = A_{22}\cdot A_{33} - A_{23}\cdot A_{32}\,. \tag{5.174}$$

Определив λ_2 и λ_3 по формулам (5.173), можно определить искомые коэффициенты по формулам (5.170), а затем и откорректированные углы по формулам (5.157).

6. Механика гибких валов

В технике часто применяются устройства, предназначенные для передачи на расстояние под разными углами продольной силы или продольного перемещения (гибкие тяги), крутящего момента или угла поворота (гибкие валы). Устройство состоит из легко изгибаемых, но жестких на растяжение и на кручение сердечника и обоймы. Примерами таких устройств могут служить тросик для фотоаппарата, гибкие тяги для рычагов управления автомобилем, гибкий валик для автомобильного спидометра, вал для глубинного вибратора бетона, бурильное устройство с обсадной трубой и т. п.

6.1. Использование всех компонентов кватернионов и бикватернионов

Кватернион – это математический объект, информационно эквивалентный четырем действительным числам. Однако в классическом варианте он используется для работы со свободными векторами в трехмерном пространстве. Как известно, для описания свободного вектора в трехмерном пространстве требуется лишь три действительных числа. Четвертый компонент кватерниона как бы является информационно лишним. Так трехмерный вектор обычно представляется кватернионом, у которого скалярная часть равна нулю. Четвертый компонент кватерниона нужен для других целей.

Причина, по которой вместе с тремя числами, описывающими вектор, запоминается и преобразуется казалось бы ненужное число, заключается в остроумном правиле умножения кватернионов. Это правило, примененное к двум векторам, дает следующий результат. В векторной части кватерниона-произведения находится векторное произведение векторов-сомножителей, а в скалярной части – скалярное произведение (правда, с обратным знаком). Таким образом, одна операция умножения кватернионов эквивалентна двум операциям умножения векторов: векторному и скалярному. Результаты этих операций содержатся в одном кватернионе. "Лишний" компонент кватерниона в этом случае получает реальное использование. За этим следует еще одно преимущество. Как известно, по векторному произведению и одному из сомножителей нельзя однозначно восстановить второй сомножитель. Зато это можно сделать, если известно, кроме векторного, также и скалярное произведение. Таким образом, если вместо трехкомпонентных векторов пользоваться четырехкомпонентными кватернионами, можно векторы не только умножать, но и делить. Более того, становится возможным определить любую аналитическую функцию кватерниона. В результате мы приходим к разветвленной алгебраической системе, где в качестве элементарного объекта выступает кватернион. В этой системе выкладки становятся очень компактными, а результаты – легко обозримыми.

При программировании процессов решения задач для компьютеров четвертый компонент кватерниона играет роль дополнительной рабочей ячейки, в которую записываются промежуточные результаты, которые можно впоследствии использовать, не выполняя вычисления заново. Формулы для представления компонентов кватерниона при решении реальных задач оказываются столь изящными (см., например, раздел 5), что это трудно объяснить чистой случайностью. Невольно вспоминается крылатое выражение известного геометра А. П. Ефремова "Законы физики ищите в математике кватернионов".

Все сказанное относится и к дуальным бикватернионам. Только дуальный бикватернион эквивалентен по информативности четырем дуальным или восьми действительным числам, а используется он для работы с винтами, которые полностью описываются шестью действительными числами. Все преимущества кватернионов справедливы и для бикватернионов.

Несмотря на эти преимущества, хочется не упустить возможность использовать четвертый компонент кватерниона или бикватерниона для хранения и обработки дополнительной содержательной информации. Понятно, что эта информация должна быть эквивалентна скалярной переменной для кватерниона и дуальной переменной для бикватерниона и сопутствовать изучаемому свободному вектору или винту. Детальный анализ преобразований, выполняемых при помощи ненормированных бикватернионов, приведен в разделе 4.9. Там, в частности, показано, что при сложении истинных эйлеровых поворотов дуальные части соответствующих бикватернионов складываются, а преобразование координат любого бикватерниона оставляет его дуальную часть неизменной.

Задачи, в которых можно использовать четвертый компонент кватерниона или бикватерниона, изредка встречаются. Одна из них – задача о расчете гибкого вала. В этой главе показано, как можно, решая эту задачу, придать физический смысл всем восьми действительным числам, составляющим бикватернион, и оперировать ими как единым математическим объектом.

6.2. Описание модели гибкого вала

Здесь рассматривается механическая модель, являющаяся идеализацией описанных выше устройств (рис. 6.1). Эту модель в дальнейшем будем обобщенно называть гибким валом.

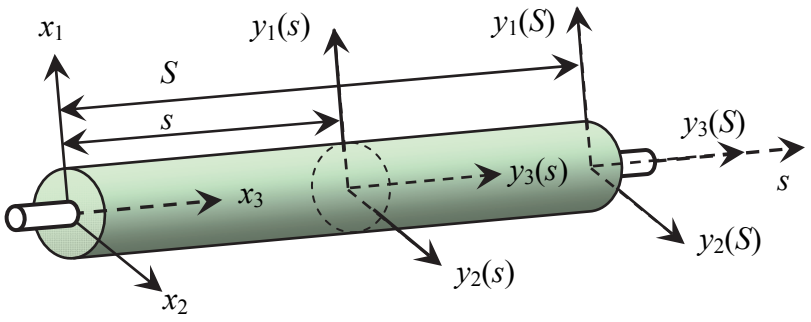


Рис. 6.1. Недеформированное состояние модели

В исходном состоянии обойма гибкого вала представляет собой прямолинейный упругий стержень. Для мысленного построения его модели выберем неподвижную правую декартову систему координат x_1, x_2, x_3. Разместим в плоскости x_1, x_2 поперечное сечение обоймы будущего гибкого вала – произвольную плоскую фигуру. Точку сечения, имеющую координаты x_1,= 0, x_2 = 0, будем называть полюсом сечения. Эта точка не обязана находиться в центре тяжести сечения. Будем поступательно перемещать сечение вдоль оси x_3. Его полюс, перемещаясь, будет прочерчивать прямую линию, называемую осью гибкого вала. Сечение, перемещаясь, будет формировать тело обоймы гибкого вала. Будем полагать, что обойма характеризуется шестью видами жесткостей: на изгиб вокруг оси x_1, на изгиб вокруг оси x_2, на кручение, на сдвиг по направлению оси x_1, на сдвиг по направлению оси x_2, на растяжение. Будем полагать, что в обойме просверлен продольный цилиндрический канал малого диаметра, ось которого совпадает с осью гибкого вала. В этот канал вставлен прямолинейный цилиндрический сердечник гибкого вала такого же диаметра, который может без трения поворачиваться внутри канала и перемещаться в продольном направлении. Этот сердечник характеризуется лишь двумя видами жесткости: жесткостью на кручение и жесткостью на растяжение.

Введем в рассмотрение дуговую координату s, отсчитываемую вдоль оси гибкого вала, имеющую размерность длины и в исходном состоянии гибкого вала равную расстоянию от начала координат до рассматриваемого сечения. Каждое сечение обоймы и каждое сечение сердечника привяжем к своей дуговой координате. Эта привязка будет сохраняться и при деформациях гибкого вала. То есть, в деформированном состоянии расстояние вдоль оси вала от начального сечения до сечения с дуговой координатой s уже не обязано оставаться равным s ни для обоймы, ни для сердечника. Более того, эти расстояния для обоймы и для сердечника, как правило, будут разными. Для рассуждений удобно представить, что в исходном состоянии на обойму и на сердечник нанесена разметка в единицах длины как на мерную ленту. Эта разметка сохраняется при деформировании гибкого вала и используется только для установления дуговой координаты. Пользоваться этой разметкой для измерения длин нельзя, как нельзя пользоваться мерной лентой, изготовленной из резины.

Будем полагать, что дуговая координата обоймы изменяется в интервале от 0 до S, где S – длина обоймы в исходном недеформированном состоянии. Длина сердечника не определена, но она достаточна, чтобы сердечник в любой ситуации заполнял обойму по всей ее длине. На дуговую координату сердечника ограничения не накладываются. Ее значения могут быть и отрицательными, и превосходящими S. Однако, всегда рассматривается только тот участок сердечника, который находится внутри обоймы.

Свяжем с каждым сечением обоймы систему координат $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$ и будем называть ее связанной (с сечением) или подвижной. Оси этих систем координат в исходном недеформированном состоянии гибкого вала ориентированы так, как и у неподвижной системы координат.

6.3. Бикватернионы исходного и деформированного состояния гибкого вала

Рассматривая участок гибкого вала, замечаем, что этот участок обладает восемью степенями свободы: три угловых степени свободы, три линейных степени свободы,

взаимное угловое и взаимное линейное перемещения сердечника и обоймы. Деформированное состояние гибкого вала может быть полностью определено бикватернионом истинного эйлерова перемещения:

$$\mathbf{\Psi}(s) = \boldsymbol{\psi}(s) + \varpi \cdot \boldsymbol{\psi}^{\circ}(s) = \begin{bmatrix} \psi_0(s) + \varpi \cdot \psi^{\circ}{}_0(s) \\ \psi_1(s) + \varpi \cdot \psi^{\circ}{}_1(s) \\ \psi_2(s) + \varpi \cdot \psi^{\circ}{}_2(s) \\ \psi_3(s) + \varpi \cdot \psi^{\circ}{}_3(s) \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

являющимся, как и все его компоненты, функцией независимой координаты s. Этот бикватернион имеет в сумме восемь независимых компонентов, по одному на каждую степень свободы. Будем называть его геометрическим бикватернионом. В этом бикватернионе будем различать главный кватернион $\boldsymbol{\psi}(s)$, состоящий из четырех безразмерных компонентов, отвечающих за угловые перемещения (повороты), и моментный кватернион $\boldsymbol{\psi}^{\circ}(s)$, состоящий из четырех компонентов, имеющих размерность длины, отвечающих за линейные перемещения.

Геометрический смысл компонентов этого бикватерниона базируется на теореме Шаля (см. раздел 3.6.1), в соответствии с которой всякое перемещение свободного твердого тела (в нашем случае сечения обоймы гибкого вала) может быть осуществлено одним винтовым перемещением относительно некоторой оси, называемой осью конечного винтового перемещения. Бикватернион $\mathbf{\Psi}(s)$ соответствует винтовому перемещению, которое переводит неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3 в систему координат $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$, связанную с сечением s.

Геометрический смысл бикватерниона $\mathbf{\Psi}(s)$ более просто уяснить, представив этот бикватернион в форме с явным указанием оси винтового перемещения (см. раздел 4.2.1):

$$\mathbf{\Psi}(s) = \mathbf{I} \cdot \Psi_0(s) + \mathbf{E}(s) \cdot \Psi_{\bullet}(s), \tag{6.2}$$

где $\mathbf{I}$ – тождественный бикватернион, $\mathbf{E}(s)$ – чисто винтовой бикватернион, определяющий ось винтового перемещения:

$$\mathbf{I} = [1;0;0;0]; \quad \mathbf{E}(s) = [0;\ e_1(s) + \varpi \cdot e^{\circ}{}_1(s);\ e_2(s) + \varpi \cdot e^{\circ}{}_2(s);\ e_3(s) + \varpi \cdot e^{\circ}{}_3(s)]. \tag{6.3}$$

Здесь $e_1(s)$, $e_2(s)$, $e_3(s)$, $e^{\circ}{}_1(s)$, $e^{\circ}{}_2(s)$, $e^{\circ}{}_3(s)$ – плюккеровы координаты единичного вектора оси винта. Кроме этого, в формуле присутствуют два дуальных числа:

$$\Psi_0(s) = \psi_0(s) + \varpi \cdot \psi^{\circ}{}_0(s); \quad \Psi_{\bullet}(s) = \psi_{\bullet}(s) + \varpi \cdot \psi^{\circ}{}_{\bullet}(s). \tag{6.4}$$

Рассмотрим их геометрический смысл. Компоненты дуального числа $\Psi_{\bullet}(s)$ таковы: $\psi_{\bullet}(s)$ – это угол, на который надо повернуть неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3, а $\psi^{\circ}{}_{\bullet}(s)$ –расстояние, на которое затем надо поступательно переместить эту систему координат с тем, чтобы она совпала с системой $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$.

Дуальное число $\Psi_0(s)$ определяет смещенное положение сердечника в сечении обоймы с дуговой координатой s. Будем полагать, что в исходном недеформированном состоянии сердечник не смещен относительно обоймы. В деформированном

состоянии сердечник может быть смещен относительно обоймы, причем в каждом сечении по-разному. Компонент $\psi_0(s)$ равен углу поворота сердечника вокруг оси x_3, компонент $\psi^\circ_0(s)$ равен линейному смещению сердечника вдоль оси x_3. Знак угла поворота определяется по правилу буравчика.

Для лучшего понимания ситуации введем понятие сердечниковых координат сечения обоймы (рис. 6.2). Представим себе, что в недеформированном состоянии на сердечник, имеющий форму цилиндра, нанесена координатная сетка цилиндрической системы координат. Угловая координата θ, выражаемая в радианах, отсчитывается от оси x_1 в сторону оси x_2. Линейная координата θ°, имеющая размерность длины, отсчитывается от плоскости $x_3 = 0$ вдоль образующей в сторону увеличения x_3. В процессе деформирования гибкого вала сердечник закручивается и растягивается вместе с нанесенной на него координатной сеткой.

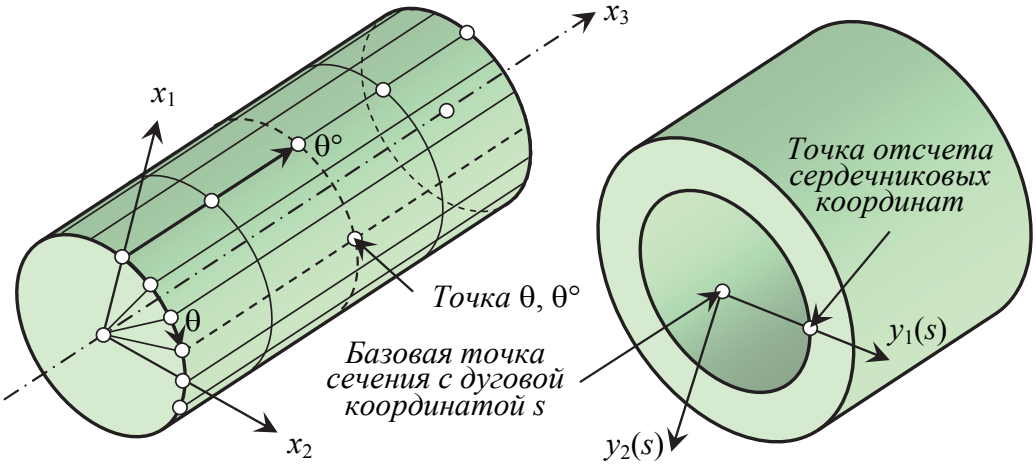


Рис. 6.2. Система сердечниковых координат

Сердечниковы координаты θ(*s*), θ°(*s*) сечения *s* равны цилиндрическим координатам точки отсчета сердечниковых координат, находящейся в сечении *s* обоймы на оси $y_1(s)$. На основании этих построений запишем формулы для нахождения компонентов $\Psi_0(s)$:

$$\psi_0(s) = -\theta(s); \quad \psi^\circ_\bullet(s) = s - \theta^\circ(s). \tag{6.5}$$

По компонентам бикватерниона $\mathbf{\Psi}(s)$, представленного в форме с явным указанием оси винтового перемещения, можно вычислить обычные компоненты этого бикватерниона:

$$\mathbf{\Psi}(s) = \begin{bmatrix} \psi_0(s) + \varpi \cdot \psi^\circ_0(s) \\ \psi_1(s) + \varpi \cdot \psi^\circ_1(s) \\ \psi_2(s) + \varpi \cdot \psi^\circ_2(s) \\ \psi_3(s) + \varpi \cdot \psi^\circ_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_0(s) \\ E_1(s) \cdot \Psi_\bullet(s) \\ E_2(s) \cdot \Psi_\bullet(s) \\ E_3(s) \cdot \Psi_\bullet(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0(s) + \varpi \cdot \psi^\circ_0(s) \\ e_1(s) \cdot \psi_\bullet(s) + \varpi \cdot \left[e^\circ_1(s) \cdot \psi_\bullet(s) + e_1(s) \cdot \psi^\circ_\bullet(s) \right] \\ e_2(s) \cdot \psi_\bullet(s) + \varpi \cdot \left[e^\circ_2(s) \cdot \psi_\bullet(s) + e_2(s) \cdot \psi^\circ_\bullet(s) \right] \\ e_3(s) \cdot \psi_\bullet(s) + \varpi \cdot \left[e^\circ_3(s) \cdot \psi_\bullet(s) + e_3(s) \cdot \psi^\circ_\bullet(s) \right] \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Преобразование от вида (6.1) к виду (6.2) выглядит так.

$$\psi_{\bullet}(s) = \pm\sqrt{\psi_1^2(s) + \psi_2^2(s) + \psi_3^2(s)}; \quad \psi^{\circ}{}_{\bullet}(s) = \left\lceil \boldsymbol{\Psi}(s) \right\rceil_{\bullet} \cdot \psi_{\bullet}(s);$$
$$e_i(s) = \frac{\psi_i(s)}{\psi_{\bullet}(s)}; \quad e^{\circ}{}_i(s) = \frac{\psi^{\circ}{}_i(s) - \psi^{\circ}{}_{\bullet}(s) \cdot e_i(s)}{\psi_{\bullet}(s)} \quad (i = 1,2,3), \tag{6.7}$$

где параметр винтовой части бикватерниона вычисляется по формуле:

$$\left\lceil \boldsymbol{\Psi}(s) \right\rceil_{\bullet} = \frac{\psi_1(s) \cdot \psi^{\circ}{}_1(s) + \psi_2(s) \cdot \psi^{\circ}{}_2(s) + \psi_3(s) \cdot \psi^{\circ}{}_3(s)}{\psi_{\bullet}^2(s)}. \tag{6.8}$$

Знак перед корнем квадратным в формуле (6.7) может быть принят любым.

Аналогичным образом можно определить бикватернион $\boldsymbol{\Psi 0}(s)$ исходного состояния гибкого вала. Для этого рассмотрим первоначально прямолинейный гибкий вал, показанный на рис. 6.1, и определим соответствующий этому состоянию бикватернион. Воспользуемся формой представления (6.2). Как видно из рисунка, ось винтового перемещения определяется единичным бикватернионом, не зависящим от координаты s:

$$\mathbf{E} = \left[0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 1 + \varpi \cdot 0\right]. \tag{6.9}$$

Угол поворота для всех s $\psi 0_{\bullet}(s) = 0$. Линейные перемещения $\psi 0^{\circ}{}_{\bullet}(s) = s$. Взаимное смещение обоймы и сердечника отсутствуют. Таким образом,

$$\Psi 0_{\bullet}(s) = 0 + \varpi \cdot s; \quad \Psi 0_0(s) = 0 + \varpi \cdot 0. \tag{6.10}$$

По формуле (6.6) получим:

$$\boldsymbol{\Psi 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot s\right]. \tag{6.11}$$

Бикватернион $\boldsymbol{\Psi 0}(s)$ соответствует перемещению, которое переводит неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3 в систему координат $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$, связанную с сечением s. Это перемещение оказалось не винтовым, а поступательным.

6.4. Наращивание гибкого вала как сложение перемещений

Пусть мы имеем участок гибкого вала длиной $s1$ в деформированном состоянии, характеризуемый бикватернионом истинного эйлерова перемещения ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi 1}(s)$ $(0 \le s \le s1)$, представленным в неподвижной системе координат x_1, x_2, x_3 (рис. 6.3). К нему надо пристыковать дополнительный участок гибкого вала длиной $s2$, деформированное состояние которого характеризуется бикватернионом истинного эйлерова перемещения ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi 2}(s)$ $(0 \le s \le s2)$, представленным в той же неподвижной системе координат, соответствующей начальному сечению этого участка. Требуется определить бикватернион истинного эйлерова перемещения ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}$, характеризующий деформированное состояние пристыкованного участка также в неподвижной системе координат.

Решение этой задачи дается известной формулой (4.170), которая в данном случае будет иметь вид:

$$ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}(s1+s) = 2\cdot\ln\left(\exp\frac{{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{2}(s)}{2}\circ\exp\frac{{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{1}(s1)}{2}\right). \tag{6.12} $$

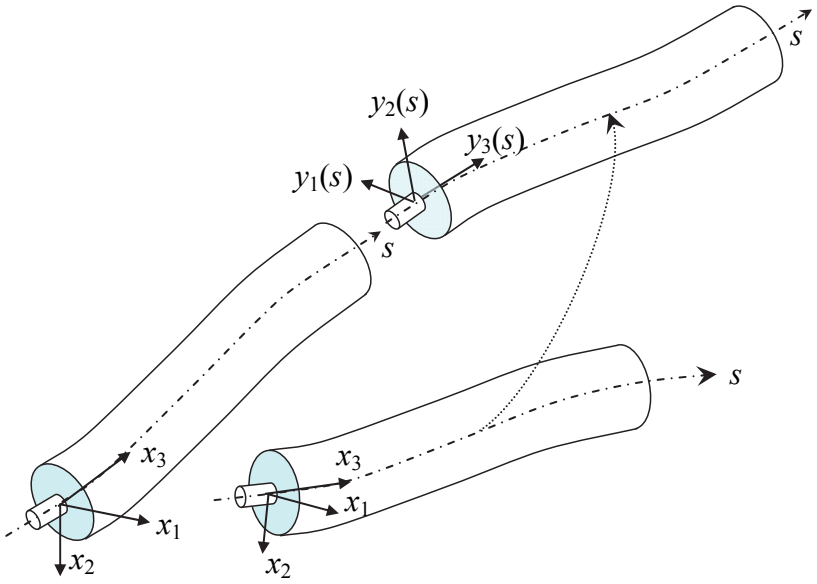


Рис. 6.3. Наращивание гибкого вала

Заметим, что

$$ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{2}(0) = \mathbf{O}. \tag{6.13} $$

Поскольку exp**O** = **I**, бикватернион для конечной точки первого участка гибкого вала ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{1}(s1)$ и бикватернион для начала пристыкованного участка ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}(s1+0)$ совпадают. Это означает, что стыковка по формуле обеспечивает непрерывность кватернионных функций в точке $s = s1$.

Рассмотрим теперь сечение пристыкованного участка гибкого вала с дуговой координатой $s1 + s$. Положение и ориентация этого сечения в пространстве описывается бикватернионом ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}(s1+s)$. Винтовые части этих бикватернионов верны, поскольку мы воспользовались известной формулой для сложения перемещений. Проверим, соблюдаются ли условия для углового $\psi_0(s1+s)$ и линейного $\psi^\circ_0(s1+s)$ перемещения сердечника. В соответствии с формулой (4.173):

$$ \psi_0(s1+s) = \psi 1_0(s1) + \psi 2_0(s); \quad \psi^\circ_0(s1+s) = \psi 1^\circ_0(s1) + \psi 2^\circ_0(s). \tag{6.14} $$

Таким образом, угловые и линейные перемещения сердечника при наращивании гибкого вала складываются, что соответствует физическому смыслу. Полученные результаты подтверждают правильность использования дуальной части бикватерниона истинного эйлерова перемещения $\boldsymbol{\Psi}(s)$ для описания сердечника гибкого вала.

6.5. Скорость движения твердого тела и локальная форма гибкого вала

Пусть форма гибкого вала описывается бикватернионом истинного эйлерова перемещения $\boldsymbol{\Psi}(s)$. Рассмотрим два сечения обоймы этого вала: одно – имеющее

дуговую координату s, другое, близкое к нему, имеющее дуговую координату $s + \Delta s$ (рис. 6.4).

Если бикватернион истинного эйлерова перемещения, переводящего сечение с координатой s в сечение с координатой $s + \Delta s$, обозначить через $\mathbf{\Delta\Psi}(s)$, то будет справедлива формула:

$$\exp\frac{\mathbf{\Psi}(s+\Delta s)}{2} = \exp\frac{\mathbf{\Delta\Psi}(s)}{2} \circ \exp\frac{\mathbf{\Psi}(s)}{2}. \tag{6.15}$$

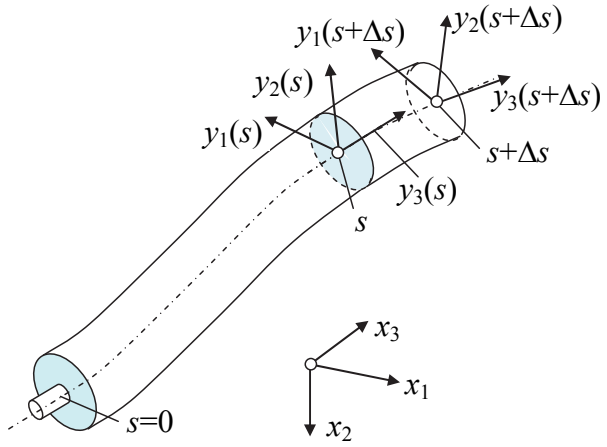


Рис. 6.4. Движение связанной системы координат

Из этой формулы следует:

$$\exp\frac{\mathbf{\Delta\Psi}(s)}{2} = \exp\frac{\mathbf{\Psi}(s+\Delta s)}{2} \circ \exp\frac{-\mathbf{\Psi}(s)}{2}; \quad \mathbf{\Delta\Psi}(s) = 2\cdot\ln\left[\exp\frac{\mathbf{\Psi}(s+\Delta s)}{2} \circ \exp\frac{-\mathbf{\Psi}(s)}{2}\right]. \tag{6.16}$$

Отношение этого бикватерниона к длине недеформированного участка гибкого вала Δs при стремлении этой длины к нулю будем называть бикватернионом локальной формы гибкого вала и обозначать символом $\mathbf{\Omega}(s)$.

$$\mathbf{\Omega}(s) = 2\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\ln\left[\exp\frac{\mathbf{\Psi}(s+\Delta s)}{2} \circ \exp\frac{-\mathbf{\Psi}(s)}{2}\right]}{\Delta s}. \tag{6.17}$$

Для краткости письма введем уже привычное нам обозначение:

$$\mathbf{\Lambda}(s) = \exp\frac{\mathbf{\Psi}(s)}{2}. \tag{6.18}$$

С учетом этого формула (6.17) приобретет более компактный вид:

$$\mathbf{\Omega}(s) = 2\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\ln\left[\mathbf{\Lambda}(s+\Delta s)\circ\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\right]}{\Delta s}. \tag{6.19}$$

Следуя формулам (2.133), (2.134), можем также записать:

$$\mathbf{\Omega}(s) = 2 \cdot {}^{\times}\mathbf{\Lambda}(s) = 2 \cdot \mathbf{\Lambda}'(s) \circ \mathbf{\Lambda}^{-1}(s). \tag{6.20}$$

Для истолкования геометрического смысла этого бикватерниона лучше представить его в системе координат, связанной с сечением:

$${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Lambda}'(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(s). \tag{6.21}$$

Бикватернион локальной формы $\mathbf{\Omega}(s)$ содержит в себе информацию о форме бесконечно малого участка гибкого вала, находящегося в окрестности сечения обоймы с дуговой координатой s. Устанавливая геометрический смысл компонентов этого бикватерниона, уместно обратить внимание на аналогию в задачах кинематики твердого тела (см. раздел 4.8) и формообразования гибкого вала. В нашем случае аналогом твердого тела является сечение обоймы гибкого вала, а аналогом времени – дуговая координата. Бикватернион $\mathbf{\Omega}(s)$, определяющий форму бесконечно малого участка гибкого вала, является аналогом бикватерниона скорости перемещения твердого тела. Продолжая аналогию, можем истолковать геометрический смысл компонентов бикватерниона $\mathbf{\Omega}(s)$ в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s:

$${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) = \boldsymbol{\omega} + \varpi \cdot \boldsymbol{\omega}^{\circ} = \left[\omega_0 + \varpi \cdot \omega^{\circ}{}_0; \omega_1 + \varpi \cdot \omega^{\circ}{}_1; \omega_2 + \varpi \cdot \omega^{\circ}{}_2; \omega_3 + \varpi \cdot \omega^{\circ}{}_3\right]. \tag{6.22}$$

В задачах кинематики твердого тела векторная часть кватерниона $\boldsymbol{\omega}$ есть вектор скорости вращения тела, а векторная часть кватерниона $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$ – вектор линейной скорости перемещения начала системы координат, в которой представлен бикватернион $\mathbf{\Omega}$, то есть, системы координат $\mathbf{Y}(s)$. В задаче о деформации гибкого вала, по аналогии, векторная часть кватерниона $\boldsymbol{\omega}$ есть вектор кривизны гибкого вала (ω_1 – кривизна относительно оси y_1, ω_2 – кривизна относительно оси y_2, ω_3 – кривизна кручения). Векторная часть кватерниона $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$ есть вектор относительного линейного смещения начала системы координат $\mathbf{Y}(s + \Delta s)$ в системе координат $\mathbf{Y}(s)$ ($\omega^{\circ}{}_1$ – сдвиг вдоль оси y_1, $\omega^{\circ}{}_2$ – сдвиг вдоль оси y_2, ($\omega^{\circ}{}_3 - 1$) – относительное удлинение в осевом направлении). Осталось два не охваченных аналогией параметра: ω_0 и $\omega^{\circ}{}_0$. В соответствии с геометрическим смыслом переменных ψ_0 и $\psi^{\circ}{}_0$, принятых в разделе 6.3, ω_0 – относительное приращение угловой сердечниковой координаты, $\omega^{\circ}{}_0$ – относительное приращение осевой сердечниковой координаты.

6.6. Бикватернион перемещений

В механике гибкого вала важной геометрической характеристикой являются перемещения составных частей этого вала в результате внешних воздействий на него. Для определения перемещений надо знать исходное состояние вала и его деформированное состояние. В предыдущем разделе описаны бикватернионы истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi 0}(s)$ и $\mathbf{\Psi}(s)$, соответствующие этим состояниям.

Бикватернионом перемещения сечения гибкого вала с координатой s будем называть бикватернион $\mathbf{\Phi}(s)$, который переводит координатную систему $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$ сечения с координатой s вала в исходном состоянии в координатную систему $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$ этого же сечения деформированного вала.

Как было установлено в разделе 4.7.4, для вывода расчетных формул надо перейти к рассмотрению половинных экспоненциальных или собственных бикватернионов:

$$\mathbf{\Lambda 0}(s)=\exp\frac{\mathbf{\Psi 0}(s)}{2};\quad \mathbf{\Lambda}(s)=\exp\frac{\mathbf{\Psi}(s)}{2};\quad \mathbf{M}(s)=\exp\frac{\mathbf{\Phi}(s)}{2}, \tag{6.23}$$

где $\mathbf{\Lambda 0}(s)$ – собственный бикватернион перемещения неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 в систему координат $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$ сечения вала в исходном состоянии; $\mathbf{\Lambda}(s)$ – собственный бикватернион перемещения неподвижной системы координат x_1, x_2, x_3 в систему координат $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$ сечения деформированного вала; $\mathbf{M}(s)$ – собственный бикватернион перемещения системы координат $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$ сечения вала в исходном состоянии в систему координат $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$ сечения деформированного вала.

В соответствии с правилом сложения перемещений (см. раздел 4.7.4) можем записать равенство:

$$\mathbf{\Lambda}(s)=\mathbf{M}(s)\circ\mathbf{\Lambda 0}(s), \tag{6.24}$$

откуда можно найти выражение для искомого собственного бикватерниона перемещения:

$$\mathbf{M}(s)=\mathbf{\Lambda}(s)\circ\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s). \tag{6.25}$$

Кстати, приведенные формулы позволяют изучать гибкий вал, который в исходном состоянии имеет произвольную, не обязательно прямолинейную, форму.

Для нашего более простого случая определим половинный экспоненциальный бикватернион для бикватерниона $\mathbf{\Psi 0}(s)$, воспользовавшись его формой с явным указанием оси винтового перемещения. Необходимые сведения о таком представлении бикватерниона содержатся в зависимостях (6.9), (6.10), (6.11). В соответствии с формулой (9.80) для половинной экспоненты имеем:

$$F_0(\Psi 0_0,\Psi 0_\bullet)=\exp\frac{\Psi 0_0}{2}\cdot\cos\frac{\Psi 0_\bullet}{2};\quad F_\bullet(\Psi 0_0,\Psi 0_\bullet)=\exp\frac{\Psi 0_0}{2}\cdot\sin\frac{\Psi 0_\bullet}{2}. \tag{6.26}$$

Подставив данные в формулу (6.26), получим:

$$F_0(\Psi 0_0,\Psi 0_\bullet)=1;\quad F_\bullet(\Psi 0_0,\Psi 0_\bullet)=\varpi\cdot\frac{s}{2}, \tag{6.27}$$

откуда следует:

$$\mathbf{\Lambda 0}(s)=\left[1+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot\frac{s}{2}\right]. \tag{6.28}$$

Обратный бикватернион имеет вид:

$$\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s)=\left[1+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad 0-\varpi\cdot\frac{s}{2}\right]. \tag{6.29}$$

Бикватернион локальной формы гибкого вала в данном случае имеет вид:

$$\mathbf{\Omega 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 1\right]. \tag{6.30}$$

Аддитивная и мультипликативные производные собственного бикватерниона исходного состояния для этого бикватерниона равны между собой:

$$\mathbf{\Lambda 0}'(s) = {}^{\times}\mathbf{\Lambda 0}(s) = \mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot \frac{1}{2}\right]. \tag{6.31}$$

6.7. Бикватернион деформаций

В технической теории стержней широко распространенными являются гипотезы плоских сечений. Наиболее распространенной является гипотеза плоских сечений, перпендикулярных к оси стержня. Она была предложена Яковом I Бернулли (Bernoulli Jacob) в 1691 году и до сих пор является основой сопротивления материалов. Вторая распространенная гипотеза принадлежит С. П. Тимошенко. Эта гипотеза предполагает, что поперечные сечения стержня остаются плоскими, но не обязательно перпендикулярными деформированной оси стержня, а нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, отсутствуют. Именно в рамках этой гипотезы будет вестись дальнейшее изложение.

Будем считать, что поперечное сечение обоймы гибкого вала, соответствующее дуговой координате s, находится в плоскости $y_1(s)$, $y_2(s)$ и не искажается в процессе деформирования вала. Оно лишь перемещается и поворачивается.

Деформацией линейного элемента, коим является гибкий вал, называют некоторую меру скорости изменения перемещений вдоль дуговой координаты.

Для того, чтобы установить эту меру, рассмотрим два бикватерниона истинного эйлерова перемещения сечений гибкого вала: для дуговой координаты s и для дуговой координаты $s + \Delta s$, а именно, $\mathbf{\Phi}(s)$ и $\mathbf{\Phi}(s + \Delta s)$. Их геометрический смысл описан в предыдущем разделе. Введем в рассмотрение еще одно перемещение $\mathbf{\Delta\Phi}(s)$ с таким расчетом, чтобы перемещение $\mathbf{\Phi}(s + \Delta s)$ было результатом последовательного выполнения перемещения $\mathbf{\Phi}(s)$, а затем $\mathbf{\Delta\Phi}(s)$.

Как известно, сложение перемещений выполняется при помощи половинных экспоненциальных бикватернионов:

$$\exp\frac{\mathbf{\Phi}(s+\Delta s)}{2} = \exp\frac{\mathbf{\Delta\Phi}(s)}{2} \circ \exp\frac{\mathbf{\Phi}(s)}{2}. \tag{6.32}$$

Отсюда

$$\exp\frac{\mathbf{\Delta\Phi}(s)}{2} = \exp\frac{\mathbf{\Phi}(s+\Delta s)}{2} \circ \exp\frac{-\mathbf{\Phi}(s)}{2} = \mathbf{M}(s+\Delta s) \circ \mathbf{M}^{-1}(s). \tag{6.33}$$

В конечном счете

$$\mathbf{\Delta\Phi}(s) = 2 \cdot \ln\left[\mathbf{M}(s+\Delta s) \circ \mathbf{M}^{-1}(s)\right]. \tag{6.34}$$

Предел отношения бикватерниона $\mathbf{\Delta\Phi}(s)$, представленного в неподвижной системе координат, к приращению дуговой координаты Δs при стремлении этого приращения к нулю назовем бикватернионом деформаций гибкого вала:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Delta\Phi}(s)}{\Delta s}. \tag{6.35} $$

Подставляя в эту формулу выражение из (6.34), получим:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) = 2 \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\ln\left[{}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s+\Delta s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{-1}(s) \right]}{\Delta s}. \tag{6.36} $$

Обращаясь к формуле (2.133), замечаем:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}{}^{\times}\mathbf{M}(s). \tag{6.37} $$

Таким образом, бикватернион деформаций равен удвоенной левой мультипликативной производной от половинной экспоненты бикватерниона перемещений.

При помощи формул (2.141) можно перейти от мультипликативной к обычной аддитивной производной половинной экспоненты бикватерниона перемещений:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}'(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{-1}(s). \tag{6.38} $$

Здесь мы молчаливо воспользовались принципом перенесения Котельникова-Штуди, поскольку формулы (2.133) и (2.141) относятся не к бикватернионам, а к кватернионам.

Удобнее пользоваться бикватернионом деформаций, представленным в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s обоймы деформированного гибкого вала:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s), \tag{6.39} $$

где ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s)$ – бикватернион деформаций в неподвижной системе координат.

Раскрывая правую часть этого равенства с использованием формул (6.38), (6.25) и (2.122), в результате получим:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) = 2 \cdot \left[{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}'(s) \right] = 2 \cdot \left[{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(s) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s) \right]. \tag{6.40} $$

Отсюда следует, что бикватернион деформаций в системе координат, связанной с сечением s, равен удвоенной разности правых мультипликативных производных собственных бикватернионов деформированного $\mathbf{\Lambda}(s)$ и исходного $\mathbf{\Lambda 0}(s)$ состояний гибкого вала. На основании формулы (6.21) можем также записать:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) = {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) - {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s). \tag{6.41} $$

Здесь ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s)$, ${}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s)$ – бикватернионы локальной формы деформированного и исходного состояний вала. Каждый из них представлен в системе координат, связанной со своим сечением.

Обращаясь к разделу 6.5, можно истолковать геометрический смысл компонентов бикватерниона ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$, представленного в системе координат, связанной с сечением s деформированного гибкого вала. Они означают:

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_0(s)$ – дополнительная кривизна кручения сердечника сверх кривизны кручения обоймы;

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_1(s)$ – дополнительная кривизна обоймы вала при повороте сечения вокруг оси y_1;

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_2(s)$ – дополнительная кривизна обоймы вала при повороте сечения вокруг оси y_2;

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_3(s)$ – дополнительная кривизна кручения обоймы вала;

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^\circ_0(s)$ – дополнительное относительное удлинение сердечника сверх относительного удлинения обоймы;

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^\circ_1(s)$ – дополнительный сдвиг обоймы вала в направлении оси y_1;

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^\circ_2(s)$ – дополнительный сдвиг обоймы вала в направлении оси y_2;

$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^\circ_3(s)$ – дополнительное относительное удлинение обоймы вала.

В этом списке слово "дополнительный, -ая, -ое" озачает увеличение описанного фактора по отношению к исходному состоянию; слово "относительное" означает значение описанного фактора, приходящееся на единицу длины дуговой координаты.

6.8. Геометрические уравнения

Геометрические уравнения устанавливают дифференциальные зависимости между перемещениями гибкого вала, определяемыми бикватернионом $\mathbf{M}(s)$, и деформациями, определяемыми бикватернионом $\mathbf{K}(s)$. Эти зависимости уже практически установлены в разделе 6.7. Из формулы (6.38) следует:

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{M}'(s) = \frac{_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s)}{2} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) . \tag{6.42}$$

Это обыкновенное бикватернионное дифференциальное уравнение, разрешенное относительно аддитивной производной $_{\mathbf{X}}\mathbf{M}'(s)$, позволяет найти бикватернион перемещений $_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s)$, если известен бикватернион деформаций гибкого вала $_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s)$.

В большинстве случаев бикватернион деформаций $\mathbf{K}(s)$ бывает задан в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s деформированного вала. Тогда на основании формулы преобразования координат:

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \tag{6.43}$$

и с учетом равенства (6.24) можем записать искомое дифференциальное уравнение, в котором бикватернион деформаций задан в системе координат $\mathbf{Y}(s)$:

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{M}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) \circ \frac{_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s)}{2} . \tag{6.44}$$

Мультипликативный аналог этого дифференциального уравнения выглядит так:

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{\times}(s) = \frac{_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s)}{2} . \tag{6.45}$$

Запишем геометрическое уравнение, в котором искомый бикватернион $\mathbf{M}(s)$ представлен в системе координат $\mathbf{Y0}(s)$, связанной с сечением s гибкого вала в исходном состоянии. Для этого воспользуемся формулой преобразования координат:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(s) \circ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s) . \tag{6.46} $$

Дифференцируя левую и правую часть этой формулы, получим:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}' = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}' \circ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}' \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M} \circ ({}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1})' . \tag{6.47} $$

Здесь и далее для краткости письма не указана зависимость переменных от дуговой координаты. Подставляя (6.46) и (6.47) в уравнение (6.44), с учетом известных формул:

$$ ({}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1})' = -{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}' \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}; \quad {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{\Omega 0} = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}' , \tag{6.48} $$

после преобразований получим искомое уравнение:

$$ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}'(s) = {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s)}{2} \circ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s) . \tag{6.49} $$

Таким образом получены два вида геометрических уравнений для вычисления бикватерниона перемещений $\mathbf{M}(s)$: в неподвижной системе координат $\mathbf{X}$ (6.44) и в системе координат $\mathbf{Y0}(s)$, связанной с сечением s в исходном состоянии гибкого вала. Они имеют не самый простой вид, поскольку позволяют рассчитывать гибкие валы, которые в исходном состоянии могут иметь непрямолинейную форму. Для первоначально прямолинейных валов будут упрощения, поскольку в этом случае бикватернионы $\mathbf{\Lambda 0}(s)$ (6.28) и $\mathbf{\Omega 0}(s)$ (6.30) имеют очень простой вид.

Рассмотрим далее геометрическое уравнение для бикватерниона $\mathbf{\Lambda}(s)$, который определяет положение каждого сечения деформированного гибкого вала. Суть уравнения содержится в равенствах (6.21) и (6.41). На основании этих равенств легко записать как аддитивную:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2} , \tag{6.50} $$

так и мультипликативную его форму:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2} . \tag{6.51} $$

Геометрические уравнения в переменных $\mathbf{\Lambda}(s)$ выглядят наиболее компактно.

Дифференциальные уравнения в мультипликативной форме позволяют записать их общие решения в виде мультипликативной квадратуры. Решение уравнения (6.45) может быть записано с использованием формул (2.162) и (2.168):

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(0) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(0) \circ \underrightarrow{\bigcap_{0}^{s} \exp\left\{ \left[\frac{{}_{\mathbf{Y}(\sigma)}\mathbf{K}(\sigma)}{2} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{\times}(\sigma) \right] \cdot d\sigma \right\}} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s) , \tag{6.52} $$

где бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(0)$ является произвольным постоянным.

Учитывая то, что, аналогично формуле (6.21):

$$_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s)\,, \tag{6.53}$$

предыдущую формулу можно переписать так:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(0) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(0) \circ \underset{0}{\overset{s}{\bigcap}} \underrightarrow{\exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y0}(\sigma)}\mathbf{\Omega 0}(\sigma) + {}_{\mathbf{Y}(\sigma)}\mathbf{K}(\sigma)}{2} \cdot d\sigma\right]} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s)\,. \tag{6.54}$$

Решение уравнения (6.51) записывается непосредственно:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0) \circ \underset{0}{\overset{s}{\bigcap}} \underrightarrow{\exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y0}(\sigma)}\mathbf{\Omega 0}(\sigma) + {}_{\mathbf{Y}(\sigma)}\mathbf{K}(\sigma)}{2} \cdot d\sigma\right]}\,. \tag{6.55}$$

Значение бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0)$ может быть выбрано произвольно.

Формулы (6.54) и (6.55) хорошо корреспондируются между собой.

Бикватернионы истинных эйлеровых перемещений определяются формулами:

$$\mathbf{\Phi}(s) = 2 \cdot \ln \mathbf{M}(s); \quad \mathbf{\Psi}(s) = 2 \cdot \ln \mathbf{\Lambda}(s)\,. \tag{6.56}$$

Для расшифровки результатов расчета полезна следующая формула (см. раздел 4.9.3):

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(s)\,. \tag{6.57}$$

В этой формуле ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$, ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s)$ главный и моментный кватернионы бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$ соответственно. Компоненты кватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ имеют следующий геометрический смысл: ${}_{\mathbf{X}}r_1(s)$, ${}_{\mathbf{X}}r_2(s)$, ${}_{\mathbf{X}}r_3(s)$ – координаты полюса сечения s обоймы в общей системе координат, ${}_{\mathbf{X}}r_0(s)$ – перемещение сердечника в сторону возрастания координаты s относительно обоймы в этом сечении.

6.9. Бикватернион внутренних усилий

Внутренние усилия гибкого вала могут быть представлены в виде одной бикватернионной функции дуговой координаты $\mathbf{U}(s)$. В системе координат, связанной с сечением s деформированного гибкого вала этот бикватернион представлен компонентами:

$${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \mathbf{u}^{\circ} = \left[u_0 + \boldsymbol{\varpi} \cdot u^{\circ}{}_0; u_1 + \boldsymbol{\varpi} \cdot u^{\circ}{}_1; u_2 + \boldsymbol{\varpi} \cdot u^{\circ}{}_2; u_3 + \boldsymbol{\varpi} \cdot u^{\circ}{}_3\right]. \tag{6.58}$$

Их механический смысл таков (рис. 6.5):

$\mathbf{u}$ – кватернион внутренних сил;

$\mathbf{u}^{\circ}$ – кватернион внутренних моментов;

u_0 – продольная сила в сердечнике;

u_1 – поперечная сила в гибком валу, направленная вдоль координатной оси y_1;

u_2 – поперечная сила в гибком валу, направленная вдоль координатной оси y_2;

u_3 – продольная сила (сердечник + обойма), направленная вдоль координатной оси y_3;

$u^{\circ}{}_0$ – крутящий момент в сердечнике;

$u^{\circ}{}_1$ – изгибающий момент в гибком валу, действующий вокруг координатной оси y_1;

u°_2 – изгибающий момент в гибком валу, действующий вокруг координатной оси y_2; u°_3 – крутящий момент (сердечник + обойма), действующий вокруг координатной оси y_3.

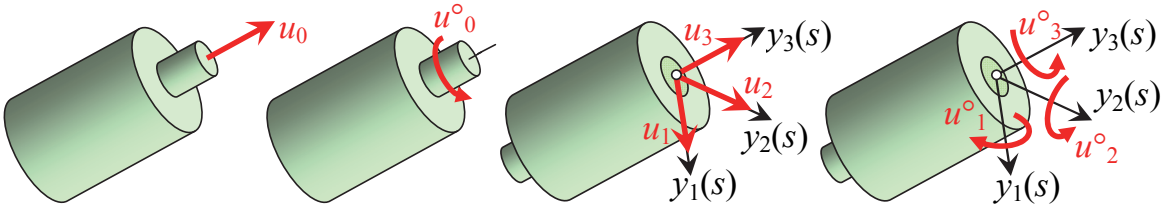


Рис. 6.5. Механический смысл компонентов u_0, u_1, u_2, u_3; u°_0, u°_1, u°_2, u°_3

Для краткости письма в формуле (6.58) и в последующих пояснениях при компонентах кватерниона опущен левый нижний индекс, указывающий на координатную систему $\mathbf{Y}(s)$, и не показана функциональная зависимость этих компонентов от дуговой координаты s.

Обращаем внимание на то, что компоненты векторной части бикватерниона $\mathbf{U}(s)$ относятся ко всему гибкому валу и представляют собой суммарные усилия сердечника и обоймы. Компоненты дуальной части бикватерниона $\mathbf{U}(s)$ представляют собой усилия в сердечнике, уравновешенные частью одноименных усилий в обойме. В связи с этим реализуются следующие формулы для определения внутренних усилий в сердечнике и в обойме гибкого вала:

$$\begin{aligned} &Nc = u_0; \quad Qh_1 = u_1; \quad Qh_2 = u_2; \quad Nh = u_3 - u_0; \\ &Tc = u^\circ_0; \quad Mh_1 = u^\circ_1; \quad Mh_2 = u^\circ_2; \quad Th = u^\circ_3 - u^\circ_0. \end{aligned} \tag{6.59}$$

Читатель без труда разберется в принятых здесь обозначениях, если будет знать, что буква N обозначает продольную силу, буква Q – поперечную силу, буква T – крутящий момент, буква M – изгибающий момент, буква c (core) – сердечник, буква h (holder) – обойма.

Кроме этого, существуют внутренние контактные силы взаимодействия сердечника и обоймы. Они будут определены далее.

6.10. Статические уравнения

Рассмотрим бесконечно малый участок гибкого вала, находящийся между сечениями обоймы с дуговыми координатами s и $s + ds$. На рис. 6.6 этот участок отделен от основного тела вала. Привычные нам внутренние усилия в этих сечениях равны компонентам бикватерниона $\mathbf{U}$ в подвижной системе координат. Интересующие нас усилия на концах рассматриваемого участка будут соответственно равны $\mathbf{Y}_{(s)}\mathbf{U}(s)$ и $\mathbf{Y}_{(s\,+\,ds)}\mathbf{U}(s\,+\,ds)$. Во фронтальных сечениях, ориентированных в сторону увеличения дуговой координаты, показаны силы и моменты с указанием систем координат, к которым они привязаны. Для составления уравнений равновесия надо учесть, что на тыльное сечение рассматриваемого бесконечно малого участка гибкого вала действуют усилия, приложенные к фронтальному сечению основного тела вала, взятые с обратным знаком.

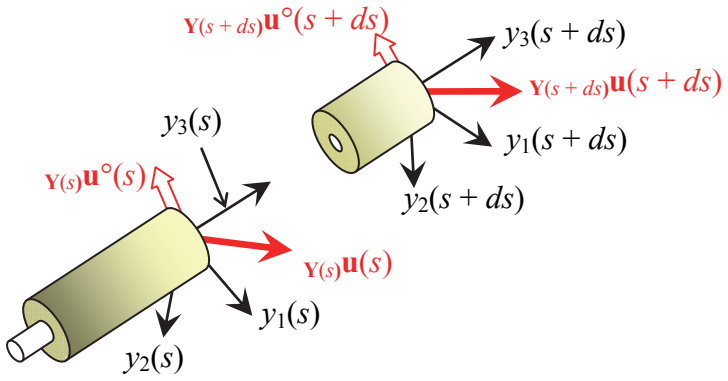


Рис. 6.6. К составлению уравнений равновесия

Представим усилия ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ и ${}_{\mathbf{Y}(s+ds)}\mathbf{U}(s+ds)$ в неподвижной системе координат **X**:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s);\ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s+ds) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s+ds) \circ {}_{\mathbf{Y}(s+ds)}\mathbf{U}(s+ds) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s+ds). \quad (6.60)$$

Заметим, что

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s+ds) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s) + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}'(s)\cdot ds;\quad {}_{\mathbf{Y}(s+ds)}\mathbf{U}(s+ds) = {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s)\cdot ds; \quad (6.61)$$

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s+ds) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s)\cdot ds;\ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s+ds) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\cdot ds, \quad (6.62)$$

и составим уравнения равновесия:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s+ds) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s) = \mathbf{O}. \quad (6.63)$$

Приравнивая к нулю разность правых частей уравнений (6.60) и учитывая равенство

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s)}{2}, \quad (6.64)$$

следующее из зависимости (6.21), после некоторых преобразований получим:

$$\frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s)}{2} \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s) - {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s)}{2} = 0. \quad (6.65)$$

Обращаясь к разделу 6.7, запишем формулу для нахождения бикватерниона ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s)$:

$${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) = {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s). \quad (6.66)$$

Геометрический смысл компонентов этой формулы описан в разделе 6.7.

Разрешая уравнение (6.65) относительно производной, придем к искомому дифференциальному уравнению для бикватерниона внутренних усилий гибкого вала, представленного в системе координат, связанной с сечением s:

$${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) - {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s)}{2}. \quad (6.67)$$

Воспользовавшись формулой (6.66), запишем это дифференциальное уравнение так:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s) = \frac{\left[{}_{\mathbf{Y0}(s)}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) \right] \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) - {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) \circ \left[{}_{\mathbf{Y0}(s)}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) \right]}{2}. \quad (6.68) $$

Однако более содержательным является уравнение (6.63), из которого следует:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}'(s) = \mathbf{O}. \quad (6.69) $$

Это означает, что бикватернион усилий в неподвижной системе координат не зависит от дуговой координаты и является константой. Общее решение дифференциального уравнения запишем в следующем виде:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0), \quad (6.70) $$

где ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0)$ – произвольный постоянный бикватернион, численно равный бикватерниону усилий в неподвижной системе координат для дуговой координаты $s = 0$.

Бикватернион усилий в подвижной системе координат, связанной с сечением s, через этот бикватернион выражается формулой:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}(s). \quad (6.71) $$

Если бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0)$ трактовать как винт, то ось этого винта называется осью системы сил, действующих на гибкий вал. Главный вектор и главный момент этой системы сил действуют вдоль оси винта.

Следует отметить, что усилия в сердечнике правильно описываются формулой (6.71), поскольку в соответствии с разделом 4.9.2 дуальная часть бикватерниона при преобразованиях координат остается неизменной

Представляют интерес погонные контактные усилия между сердечником и обоймой гибкого вала. Для определения этих сил воспользуемся таким приемом. Из бесконечно короткого отрезка гибкого вала длиной ds удалим сердечник, а его действие на обойму заменим системой погонных нагрузок, определяемой бикватернионом ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{P}(s)$, компоненты которого представлены в системе координат, связанной с сечением обоймы s. Они имеют следующий механический смысл:

$\mathbf{p}$ – кватернион погонных сил;
$\mathbf{p}^\circ$ – кватернион погонных моментов;
p_0 – погонная продольная нагрузка, приложенная к сердечнику;
p_1 – погонная поперечная нагрузка, приложенная к обойме по координатной оси y_1;
p_2 – погонная поперечная нагрузка, приложенная к обойме по координатной оси y_2;
p_3 – погонная продольная нагрузка, приложенная к обойме по координатной оси y_3 за вычетом погонной продольной нагрузки, приложенной к сердечнику;
p°_0 – погонный крутящий момент, приложенный к сердечнику;
p°_1 – погонный изгибающий момент, приложенный к обойме, действующий вокруг координатной оси y_1;
p°_2 – погонный изгибающий момент, приложенный к обойме, действующий вокруг координатной оси y_2;
p°_3 – погонный крутящий момент вокруг координатной оси y_3, приложенный к обойме, за вычетом погонного крутящего момента, приложенного к сердечнику.

Воспользуемся уравнением равновесия (6.67), полагая, что внутренние усилия в рассматриваемом отрезке гибкого вала без сердечника с учетом формулы (6.59) выражаются бикватернионом:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U1}(s) = \begin{bmatrix} 0 + \varpi \cdot 0 \\ u_1 + \varpi \cdot u^\circ_1 \\ u_2 + \varpi \cdot u^\circ_2 \\ (u_3 - u_0) + \varpi \cdot (u^\circ_3 - u^\circ_0) \end{bmatrix}. \tag{6.72} $$

Уравнивая приращения внутренних усилий на длине отрезка гибкого вала *ds*, получим:

$$ \begin{gathered} \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) \circ_{\mathbf{Y}(s)} \mathbf{U}(s) - {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) \circ_{\mathbf{Y}(s)} \mathbf{\Omega}(s)}{2} = \\ = \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) \circ_{\mathbf{Y}(s)} \mathbf{U1}(s) - {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U1}(s) \circ_{\mathbf{Y}(s)} \mathbf{\Omega}(s)}{2} + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{P}(s). \end{gathered} \tag{6.73} $$

Отсюда

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{P}(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) \circ \left[{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) - {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U1}(s) \right] - \left[{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) - {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U1}(s) \right] \circ_{\mathbf{Y}(s)} \mathbf{\Omega}(s)}{2}. \tag{6.74} $$

Раскрывая эту формулу поэлементно, опуская привязки к системе координат и не показывая зависимости всех переменных от дуговой координаты *s*, будем иметь:

$$ p_1 = u_0 \cdot \omega_2; \quad p_2 = -u_0 \cdot \omega_1; \quad p^\circ_1 = u^\circ_0 \cdot \omega_2 + u_0 \cdot \omega^\circ_2; \quad p^\circ_2 = -u^\circ_0 \cdot \omega_1 - u_0 \cdot \omega^\circ_1. \tag{6.75} $$

Учитывая формулу (6.66), можем записать окончательно:

$$ \begin{gathered} p_1 = u_0 \cdot (\omega 0_2 + \kappa_2); \quad p_2 = -u_0 \cdot (\omega 0_1 + \kappa_1); \\ p^\circ_1 = u^\circ_0 \cdot (\omega 0_2 + \kappa_2) + u_0 \cdot (\omega 0^\circ_2 + \kappa^\circ_2); \quad p^\circ_2 = -u^\circ_0 \cdot (\omega 0_1 + \kappa_1) - u_0 \cdot (\omega 0^\circ_2 + \kappa^\circ_2). \end{gathered} \tag{6.76} $$

Остальные четыре компонента контактных усилий равны нулю.

Напоминаем, что u_0 – продольное усилие в сердечнике, u°_0 – крутящий момент в сердечнике; $\omega 0_1$, $\omega 0_2$ – кривизны обоймы в исходном состоянии; $\omega 0^\circ_1$, $\omega 0^\circ_2$ – относительные сдвиги обоймы в исходном состоянии; κ_1, κ_2 – приращения кривизн обоймы при переходе из исходного в рассматриваемое состояние; κ°_1, κ°_2 – приращения относительных сдвигов обоймы при переходе из исходного в рассматриваемое состояние.

Таким образом, получены формулы для определения усилий взаимодействия сердечника и обоймы, которые показывают, какие контактные усилия возникают, если сердечник напряжен. Достаточно неожиданным оказался тот факт, что сердечник передает на обойму не только поперечные усилия, но и крутящие моменты.

6.11. Физические уравнения

Под физическими уравнениями будем подразумевать зависимости между внутренними усилиями ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$, действующими в сечении гибкого вала с координатой s, и его деформациями ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$ в окрестности этого же сечения. Будем полагать, что известны податливости сердечника при действии на него продольной силы c°_0 и крутящего момента c_0, а также податливости обоймы при действии на нее продольной c°_3 и поперечных c°_1 и c°_2 сил, крутящего c_3 и изгибающих c_1 и c_2 моментов: всего восемь вещественных чисел.

Тогда с использованием (6.59) искомые зависимости будут определяться формулами:

$$\begin{aligned} &\kappa_0 = c_0 \cdot u^{\circ}_0; \quad \kappa_1 = c_1 \cdot u^{\circ}_1; \quad \kappa_2 = c_2 \cdot u^{\circ}_2; \quad \kappa_3 = c_3 \cdot (u^{\circ}_3 - u^{\circ}_0); \\ &\kappa^{\circ}_0 = c^{\circ}_0 \cdot u_0; \quad \kappa^{\circ}_1 = c^{\circ}_1 \cdot u_1; \quad \kappa^{\circ}_2 = c^{\circ}_2 \cdot u_2; \quad \kappa^{\circ}_3 = c^{\circ}_3 \cdot (u_3 - u_0). \end{aligned} \tag{6.77}$$

Для лучшего понимания, какие податливости имеются в виду, заметим, что податливости c_i (i = 0, ..., 3) имеют размерность (сила $^{-1}$·длина $^{-2}$), как у $1/(E{\cdot}J)$, а податливости c°_i (i = 0, .., 3) имеют размерность (сила $^{-1}$), как у $1/(E{\cdot}A)$, где E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения, A – площадь поперечного сечения.

6.12. Краевая задача

В предыдущих разделах рассматривались математические зависимости между бикватернионами и другими величинами, описывающими напряженно-деформированное состояние гибкого вала безотносительно к конкретным задачам.

Рассмотрим теперь классическую задачу, относящуюся к категории краевых.

Дан первоначально прямолинейный отрезок гибкого вала длиной (по обойме) S, податливости составных частей которого выражаются восемью числами c_i, c°_i (i = 0, ..., 3), смысл которых расшифрован в разделе 6.11.

Требуется определить его деформированное состояние, выраженное бикватернионом ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(s)$ в неподвижной системе координат, и напряженное состояние, выраженное бикватернионом ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ в подвижной системе координат, если заданы бикватернионы ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(0)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(S)$, определяющие положение концевых сечений гибкого вала. Описание бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(s)$ приведено в разделе 6.3, а бикватерниона ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ – в разделе 6.9.

В качестве основных неизвестных при решении задачи можно выбрать половинный экспоненциальный бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$ по отношению к искомому бикватерниону ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(s)$ и бикватернион внутренних усилий ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s)$, выраженные в неподвижной системе координат. В этом случае дифференциальные уравнения для решения задачи будут выглядеть наиболее просто. Дифференцирование по дуговой координате s будем обозначать штрихом.

Геометрическое уравнение, выраженное через аддитивную производную, имеет вид:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2}. \tag{6.78}$$

Оно может быть записано и через правую мультипликативную производную:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2}. \tag{6.79} $$

В эти уравнения входят бикватернион локальной формы гибкого вала в исходном состоянии ${}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s)$, описанный в разделе 6.6, и бикватернион деформаций ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$, рассмотренный в разделе 6.7. Для первоначально прямолинейного и недеформированного гибкого вала бикватернион ${}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s)$ имеет простой и компактный вид:

$$ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 1\right]. \tag{6.80} $$

Общее решение уравнения может быть выражено в виде мультипликативной квадратуры:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0) \circ \prod_{0}^{s} \exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y0}(\sigma)}\mathbf{\Omega 0}(\sigma) + {}_{\mathbf{Y}(\sigma)}\mathbf{K}(\sigma)}{2} \cdot d\sigma\right], \tag{6.81} $$

где ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0)$ – произвольный постоянный бикватернион. Он равен значению искомой бикватернионной функции при значении дуговой координаты $s = 0$.

Статическое уравнение выглядит совершенно элементарно:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}'(s) = \mathbf{O}. \tag{6.82} $$

Из него следует, что внутренние усилия в неподвижной системе координат не зависят от дуговой координаты s и являются константами:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0). \tag{6.83} $$

Этих констант восемь. Будем трактовать их как внутренние усилия при $s = 0$.

Внутренние усилия ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ в подвижной системе координат выражаются через их значения в неподвижной системе координат по формуле (4.176), которая в нашем случае приобретает вид:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s). \tag{6.84} $$

Рассмотрим теперь бикватернион деформаций ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$. Его компоненты выражаются через внутренние усилия ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ некватернионной алгебраической связью:

$$ \begin{aligned} &{}_{\mathbf{Y}}\kappa_0 = c_0 \cdot {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}{}_0; \quad {}_{\mathbf{Y}}\kappa_1 = c_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}{}_1; \quad {}_{\mathbf{Y}}\kappa_2 = c_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}{}_2; \quad {}_{\mathbf{Y}}\kappa_3 = c_3 \cdot ({}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}{}_3 - {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}{}_0); \\ &{}_{\mathbf{Y}}\kappa^{\circ}{}_0 = c^{\circ}{}_0 \cdot {}_{\mathbf{Y}}u_0; \quad {}_{\mathbf{Y}}\kappa^{\circ}{}_1 = c^{\circ}{}_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}u_1; \quad {}_{\mathbf{Y}}\kappa^{\circ}{}_2 = c^{\circ}{}_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}u_2; \quad {}_{\mathbf{Y}}\kappa^{\circ}{}_3 = c^{\circ}{}_3 \cdot ({}_{\mathbf{Y}}u_3 - {}_{\mathbf{Y}}u_0). \end{aligned} \tag{6.85} $$

В этих формулах зависимость переменных от дуговой координаты s не показана.

Таким образом, общее решение задачи содержит в своем составе два произвольных бикватерниона: ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0)$, что эквивалентно шестнадцати произвольным постоянным. Эти бикватернионы надо определить через краевые условия, то есть через бикватернионы ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(0)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(S)$, которые также эквивалентны шестнадцати

произвольным постоянным. Проблема с произвольным бикватернионом ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0)$ решается просто:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0) = \exp\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(0)}{2}. \tag{6.86} $$

Что касается краевого условия при $s = S$, то его надо удовлетворить, подбирая должным образом произвольный бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0)$. В общем случае проблема выбора бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(0)$ сложна и сводится к удовлетворению системы восьми нелинейных алгебраических уравнений. Она актуальна для большинства краевых задач. Использование бикватернионов не помогает при решении этой проблемы.

После того как найдены основные неизвестные бикватернионы ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s)$, можно выразить через них искомые кватернионы:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(s) = 2\cdot \mathrm{Ln}\,{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s); \quad {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s). \tag{6.87} $$

Представляет интерес также параметрическое уравнение оси гибкого вала. Его можно получить через главный и моментный кватернионы ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s)$, составляющие вычисленный ранее половинный экспоненциальный бикватернион:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) + \varpi\cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s). \tag{6.88} $$

Это параметрическое кватернионное уравнение основано на формуле (4.178) и имеет вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s) = 2\cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(s). \tag{6.89} $$

Компоненты кватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ имеют следующий геометрический смысл:

${}_{\mathbf{X}}r_1(s)$, ${}_{\mathbf{X}}r_2(s)$, ${}_{\mathbf{X}}r_3(s)$ – координаты полюса сечения s в неподвижной системе координат; ${}_{\mathbf{X}}r_0(s)$ – линейное смещение сердечника гибкого вала относительно обоймы в сечении s в сторону увеличения координаты s.

7. Механика упругой проволоки

7.1. Постановка задачи

Рассматриваемая задача состоит в определении формы ненагруженного отрезка упругой проволоки и в нахождении внутренних усилий в поперечных сечениях этого отрезка в зависимости от граничных условий на его концах.

Граничные условия могут быть сформулированы в перемещениях (заданы координаты центра концевого сечения и его ориентация в пространстве), в усилиях (заданы продольное и поперечные усилия, крутящий и изгибающие моменты в концевом сечении) или в смешанной форме (задана корректная комбинация перемещений и внутренних усилий).

При решении задачи будем руководствоваться классической теорией изгиба стержней Бернулли. Это означает, что для рассматриваемой проволоки справедлива гипотеза плоских сечений, которые до и после деформации остаются нормальными к оси проволоки. Материал проволоки будем считать идеально упругим. Будем учитывать лишь деформации изгиба и кручения проволоки, то есть будем полагать, что проволока нерастяжима и не испытывает деформаций от поперечных усилий.

Кроме обычного случая, когда первоначальная форма проволоки считается прямолинейной, будем рассматривать другие исходные состояния проволоки. В частности, проволока в первоначальном состоянии может быть свернута в бухту, являться замкнутым кольцом или представлять собой спиральную пружину.

Задача о равновесных формах упругой проволоки является частным случаем задачи о гибком вале, рассмотренной в главе 6. Для того, чтобы перейти от гибкого вала к упругой проволоке, достаточно положить, что сердечник гибкого вала отсутствует, и считать, что проволока нерастяжима и не испытывает деформаций от поперечных усилий.

Тем не менее, эта глава не будет упрощенным повторением предыдущей. В ней будут более подробно изучены искривленные начальные состояния проволоки, будут приведены постановки этой же задачи с другими наборами основных неизвестных функций, получены соответствующие им системы дифференциальных уравнений и рассмотрены различные варианты граничных условий.

Задачи такого типа в механике часто называют задачами об упругой линии. В их решение внесли вклад крупнейшие ученые.

Плоская упругая линия была изучена Яковом Бернулли и Леонардом Эйлером. Эйлер исследовал различные очертания плоской упругой линии (эластики Эйлера) и установил девять различных ее типов.

В 1816 г. Пуассон получил дифференциальные уравнения упругой линии двоякой кривизны для первоначально прямолинейного стержня, находящегося в равновесии под действием сил, приложенных к его концам. В 1880 г. Эрмит получил замкнутое решение этих уравнений в эллиптических функциях.

Е. Л. Николаи в своей магистерской диссертации [42] дополнил уже известное решение задачи об упругой линии двоякой кривизны исследованием различных ее очертаний. Он рассмотрел вопрос об устойчивости равновесия стержня, деформированного в виде винтовой линии и получил неожиданный результат (парадокс Николаи). Оказалось, что равновесная прямолинейная форма скрученной проволоки неустойчива при сколь угодно малом значении скручивающего момента.

Современное состояние механики упругих стержней в двухмерной постановке описано в монографии Е. П. Попова [48], пространственная задача подробно рассмотрена в работах А. А. Илюхина [25, 26], статика, устойчивость и колебания естественно изогнутых гибких стержней исследованы в монографии В. И. Гуляева, В. В. Гайдайчука и В. Л. Кошкина [17].

7.2. Размеры и координаты

Пусть исследуемый отрезок проволоки имеет длину S и постоянное по длине круговое поперечное сечение с радиусом r. Каждое сечение проволоки будем определять дуговой координатой s, измеряемой вдоль оси проволоки и изменяющейся в пределах $0 \le s \le S$. При изучении перемещений точек этого отрезка проволоки и внутренних усилий в нем будем пользоваться двумя правыми системами прямоугольных декартовых координат: неподвижной – x_1, x_2, x_3, связанной с «землей», и подвижной – $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$, связанной с конкретным поперечным сечением проволоки. Подвижная система координат связана с сечением таким образом, что ее начало находится в центре сечения, ось $y_3(s)$ направлена по нормали к сечению в сторону увеличения координаты s, а оси $y_1(s)$ и $y_2(s)$ лежат в плоскости сечения и служат для определения направления векторов усилий и перемещений. Направление осей $y_1(s)$ и $y_2(s)$ определяется при задании исходного состояния проволоки.

7.3. Бикватернионное представление формы проволоки

В качестве основного бикватерниона, определяющего положение сечения проволоки в искривленном состоянии, примем чисто винтовой бикватернион истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}(s)$ (см. раздел 4.7)**,** переводящий неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3 путем ее винтового движения вокруг некоторой оси до совпадения с подвижной системой $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$, связанной с этим сечением. Поскольку этот бикватернион чисто винтовой, его дуальная часть нулевая:

$$\Psi_0(s) = 0 + \varpi \cdot 0 . \tag{7.1}$$

Геометрический смысл этого бикватерниона легче осознать, рассмотрев формулу:

$$\mathbf{\Psi}(s) = \Psi_{\bullet}(s) \cdot \mathbf{E}(s) , \tag{7.2}$$

где $\mathbf{E}(s)$ – единичный винт, вокруг оси которого поворачивается и вдоль оси которого смещается система координат;

$\Psi_{\bullet}(s)$ – дуальный угол этого перемещения.

Рассмотрим эти объекты более подробно. Единичный винт – это дуальный объект вида:

$$\mathbf{E}(s)=\mathbf{e}(s)+\varpi\cdot\mathbf{e}^{\circ}(s);\ \mathbf{e}(s)=\left[e_1(s),e_2(s),e_3(s)\right];\ \mathbf{e}^{\circ}(s)=\left[e^{\circ}{}_1(s),e^{\circ}{}_2(s),e^{\circ}{}_3(s)\right], \tag{7.3}$$

где $\mathbf{e}(s)$ – единичный вектор, определяющий направление оси;
$\mathbf{e}^{\circ}(s)$ – вектор-момент единичного вектора $\mathbf{e}(s)$ относительно начала координат.

Следует отметить, что компоненты этих векторов одинаковы в неподвижной и подвижной системах. Единичный винт $\mathbf{E}(s)$ является нормированным. Его дуальная норма равна единице, то есть:

$$e_1^2(s)+e_2^2(s)+e_3^2(s)=1;\quad e_1(s)\cdot e^{\circ}{}_1(s)+e_2(s)\cdot e^{\circ}{}_2(s)+e_3(s)\cdot e^{\circ}{}_3(s)=0. \tag{7.4}$$

Дуальный угол поворота – это дуальное число следующего вида:

$$\Psi_{\bullet}(s)=\psi_{\bullet}(s)+\varpi\cdot\psi^{\circ}{}_{\bullet}(s), \tag{7.5}$$

где $\psi_{\bullet}(s)$ – угол поворота системы координат вокруг оси винта (по правилу буравчика);
$\psi^{\circ}{}_{\bullet}(s)$ – линейное перемещение системы координат вдоль оси винта.

Кроме бикватерниона истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}(s)$ будет использоваться собственный (половинный экспоненциальный) бикватернион:

$$\mathbf{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\lambda}(s)+\varpi\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s)=\exp\frac{\mathbf{\Psi}(s)}{2}. \tag{7.6}$$

Этот бикватернион тоже является нормированным:

$$\begin{gathered}\lambda_0^2(s)+\lambda_1^2(s)+\lambda_2^2(s)+\lambda_3^2(s)=1;\\ \lambda_0(s)\cdot\lambda^{\circ}{}_0(s)+\lambda_1(s)\cdot\lambda^{\circ}{}_1(s)+\lambda_2(s)\cdot\lambda^{\circ}{}_2(s)+\lambda_3(s)\cdot\lambda^{\circ}{}_3(s)=0.\end{gathered} \tag{7.7}$$

Его можно представить формулой:

$$\mathbf{\Lambda}(s)=\mathbf{I}\cdot\cos\frac{\Psi_{\bullet}(s)}{2}+\mathbf{E}(s)\cdot\sin\frac{\Psi_{\bullet}(s)}{2}, \tag{7.8}$$

которая покомпонентно выглядит так:

$$\lambda_0(s)=\cos\frac{\psi_{\bullet}(s)}{2};\quad \lambda^{\circ}{}_0(s)=-\frac{\psi^{\circ}{}_{\bullet}(s)}{2}\cdot\sin\frac{\psi_{\bullet}(s)}{2}; \tag{7.9}$$

$$\lambda_i(s)=e_i(s)\cdot\sin\frac{\psi_{\bullet}(s)}{2};\lambda^{\circ}{}_i(s)=e_i(s)\cdot\frac{\psi^{\circ}{}_{\bullet}(s)}{2}\cdot\cos\frac{\psi_{\bullet}(s)}{2}+e^{\circ}{}_i(s)\cdot\sin\frac{\psi_{\bullet}(s)}{2};(i=1,2,3), \tag{7.10}$$

или вычислить по формулам (9.86) и (9.87).

На основании этого бикватерниона можно легко вычислять компоненты вектора, соединяющего начало неподвижной системы координат с началом подвижной системы координат (4.178). Он является векторной частью кватерниона $\mathbf{r}(s)$. Ниже приведены формулы для его определения как в подвижной ${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{r}(s)$ так и в неподвижной ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}(s)$ системах координат:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}(s) = 2\cdot\boldsymbol{\lambda}^{-1}(s)\circ\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s);\quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s) = 2\cdot\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s)\circ\boldsymbol{\lambda}^{-1}(s). \tag{7.11} $$

Заметим, что кватернион $\mathbf{r}(s)$ – чисто векторный $[{}_{\mathbf{X}}r_0(s) = 0]$ в силу того, что компонент $\psi^{\circ}(s)$ основного бикватерниона в соответствии с формулой (7.1) равен нулю.

Важной характеристикой формы проволоки является ее локальная форма вблизи рассматриваемого сечения (см. раздел 6.5). Она характеризуется бикватернионом $\boldsymbol{\Omega}(s)$, который выражается через собственный бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}(s)$ следующим образом:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\Omega}(s) = 2\cdot{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(s)\circ{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}'(s). \tag{7.12} $$

Система координат $\mathbf{Y}$, связанная с сечением s, выбрана не случайно, поскольку в ней лучше всего выражен геометрический смысл компонентов этого бикватерниона:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\Omega}(s) = {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}(s) + \varpi\cdot{}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ}(s);\ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}(s) = \left[0,\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_1(s),\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_2(s),\ {}_{\mathbf{Y}}\omega_3(s)\right];\ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ}(s) = \left[0,0,0,1\right]. \tag{7.13} $$

Главный кватернион ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}(s)$ ответствен за кривизны проволоки. При этом ${}_{\mathbf{Y}}\omega_1$ – кривизна относительно оси y_1, ${}_{\mathbf{Y}}\omega_2$ – кривизна относительно оси y_2, ${}_{\mathbf{Y}}\omega_3$ – кривизна кручения. Моментный кватернион ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ}(s)$ ответствен за смещения. Он является константой, обозначенной в формуле (7.13). Эта константа – результат упрощений, принятых в формулировке задачи: сечение проволоки всегда перпендикулярно ее оси (поперечные смещения отсутствуют), проволока является нерастяжимой (продольное смещение сечения проволоки в точности равно приращению дуговой координаты).

7.4. Исходная естественная форма проволоки

В классических задачах принято считать, что первоначальная ненапряженная форма проволоки – прямолинейная. Однако для решения многих технических задач такое предположение бывает слишком ограничительным. В реальной жизни проволока поставляется в бухтах. Поэтому зачастую отрезок проволоки первоначально имеет форму дуги окружности. Из проволоки изготавливают различные изделия путем ее пластического деформирования. Одним из таких изделий является цилиндрическая пружина. Встречаются и иные гнутые изделия из проволоки, которые надо рассчитывать. Результаты расчета зависят от первоначальной формы изделия, которая может быть описана при помощи бикватернионной функции дуговой координаты. Будем обозначать эту функцию $\boldsymbol{\Psi 0}(s)$.

Полагаем, что исходная форма исследуемого изделия получается из прямолинейного отрезка проволоки путем ее изгибания и скручивания. Напряжения в исходном состоянии отсутствуют. Задавая исходную форму, надо оставаться в рамках принятых упрощений, сохраняя во всех случаях кватернион ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} = [0, 0, 0, 1]$.

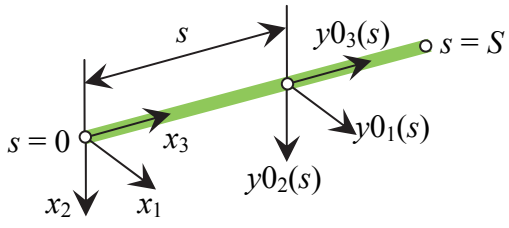


Рис. 7.1. Схема прямолинейного отрезка

Прямолинейная форма. Вначале рассмотрим прямолинейный отрезок проволоки (рис. 7.1) и запишем соответствующую этому случаю бикватернионную функцию.

Воспользуемся формой представления бикватерниона с явным указанием оси винтового перемещения (7.2) и определим бикватернион $\mathbf{\Psi 0}(s)$, переводящий неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3 путем ее поворота и линейного смещения относительно оси винтового перемещения до совпадения с подвижной системой $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$. Как видно из рисунка, ось винтового перемещения определяется единичным бикватернионом, не зависящим от координаты s:

$$\mathbf{E} = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 1 + \varpi \cdot 0\right]. \tag{7.14}$$

Угол поворота для всех s $\psi 0_\bullet(s) = 0$. Линейные перемещения $\psi 0^\circ_\bullet(s) = s$. Таким образом,

$$\Psi 0_\bullet(s) = 0 + \varpi \cdot s\,. \tag{7.15}$$

Искомый бикватернион вычисляется по формуле (7.2):

$$\mathbf{\Psi 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot s\right]. \tag{7.16}$$

В дальнейшем понадобится соответствующий этому половинный экспоненциальный бикватернион. Для его определения воспользуемся формой с явным указанием оси винтового перемещения, основываясь на формулах (7.14), (7.15), (7.16). В соответствии с формулой (9.80) для половинной экспоненты имеем:

$$F_0(\Psi 0_0, \Psi 0_\bullet) = \exp\frac{\Psi 0_0}{2} \cdot \cos\frac{\Psi 0_\bullet}{2}; \quad F_\bullet(\Psi 0_0, \Psi 0_\bullet) = \exp\frac{\Psi 0_0}{2} \cdot \sin\frac{\Psi 0_\bullet}{2}. \tag{7.17}$$

Подставив данные в формулу (7.17), будем иметь:

$$F_0(\Psi 0_0, \Psi 0_\bullet) = 1; \quad F_\bullet(\Psi 0_0, \Psi 0_\bullet) = \varpi \cdot \frac{s}{2}. \tag{7.18}$$

В результате получим покомпонентный состав искомого бикватерниона:

$$\mathbf{\Lambda 0}(s) = \left[1 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot \frac{s}{2}\right]. \tag{7.19}$$

Представляют также интерес мультипликативные производные этого бикватерниона, которые можно найти, базируясь на зависимостях (2.141) и (2.142), по формулам:

$${}^{\times}\mathbf{\Lambda 0}(s) = \mathbf{\Lambda 0}'(s) \circ \mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s); \quad \mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s) = \mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s) \circ \mathbf{\Lambda 0}'(s)\,. \tag{7.20}$$

Выполняя вычисления, получим:

$${}^{\times}\mathbf{\Lambda 0}(s) = \mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot \frac{1}{2}\right]. \tag{7.21}$$

Бикватернион локальной формы для этого исходного состояния имеет простейший вид:

$${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{\Omega 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; 0 + \varpi \cdot 0; 0 + \varpi \cdot 0; 0 + \varpi \cdot 1\right]. \tag{7.22}$$

Заготовка из бухты. Рассмотрим теперь свободный от напряжений отрезок проволоки длиной S, изогнутый по форме окружности радиуса R (рис. 7.2). Такова будет заготовка длиной S, отрезанная от бухты проволоки.

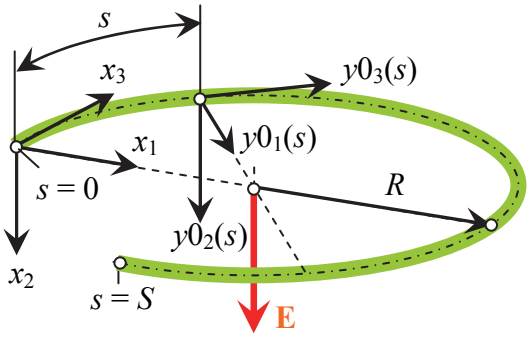


Рис. 7.2. Схема заготовки из бухты

Определим бикватернион $\mathbf{\Psi 0}(s)$, переводящий неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3 путем ее поворота вокруг оси винтового перемещения и линейного смещения вдоль этой оси до совпадения с подвижной системой $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$. Как видно из рисунка, единичный винт $\mathbf{E}$, определяющий ось винтового перемещения, можно представить так:

$$\mathbf{E} = \left[0 + \varpi \cdot 0; 0 + \varpi \cdot 0; 1 + \varpi \cdot 0; 0 + \varpi \cdot R\right]. \quad (7.23)$$

Угол, на который нужно повернуть неподвижную систему координат, равен s/R. Смещать ее вдоль оси не нужно.

Таким образом:

$$\Psi 0_{\bullet}(s) = s/R + \varpi \cdot 0. \quad (7.24)$$

Искомый бикватернион можно вычислить теперь по формуле (7.2):

$$\mathbf{\Psi 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad s/R + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot s\right]. \quad (7.25)$$

В дальнейшем нам понадобится половинный экспоненциальный бикватернион:

$$\mathbf{\Lambda 0}(s) = \exp\frac{\mathbf{\Psi 0}(s)}{2} = \left[\cos\frac{s}{2 \cdot R} + \varpi \cdot 0; 0 + \varpi \cdot 0; \sin\frac{s}{2 \cdot R} + \varpi \cdot 0; 0 + \varpi \cdot R \cdot \sin\frac{s}{2 \cdot R}\right] \quad (7.26)$$

и мультипликативные производные:

$${}^{\times}\mathbf{\Lambda 0}(s) = \mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad \frac{1}{2 \cdot R} + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot \frac{1}{2}\right]. \quad (7.27)$$

Бикватернион локальной формы для этого исходного состояния имеет такой вид:

$${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{\Omega 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad \frac{1}{R} + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 1\right]. \quad (7.28)$$

Витая цилиндрическая пружина. Рассмотрим теперь отрезок витой цилиндрической пружины длиной S (рис. 7.3). Ось пружины лежит на боковой поверхности цилиндра, имеющего радиус R. Плотность навивки пружины характеризуется углом φ между осью проволоки и плоскостью, перпендикулярной к оси цилиндра. Более привычная характеристика плотности навивки пружины – ее шаг h – выражается через принятую выше формулой:

$$h = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \mathrm{tg}\,\varphi. \quad (7.29)$$

Поперечному сечению проволоки с дуговой координатой s соответствует местная подвижная декартова система координат $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$. Ось $y0_3(s)$ этой системы координат направлена по касательной к оси пружины в сторону увеличения координаты s. Ось $y0_1(s)$ этой системы направлена на ось цилиндра и пересекает ее под прямым углом. Ось $y0_2(s)$ перпендикулярна двум рассмотренным выше осям и образует с ними правую тройку векторов. Неподвижная система координат x_1, x_2, x_3 совпадает с местной системой координат $y0_1(0)$, $y0_2(0)$, $y0_3(0)$ в точке $s = 0$.

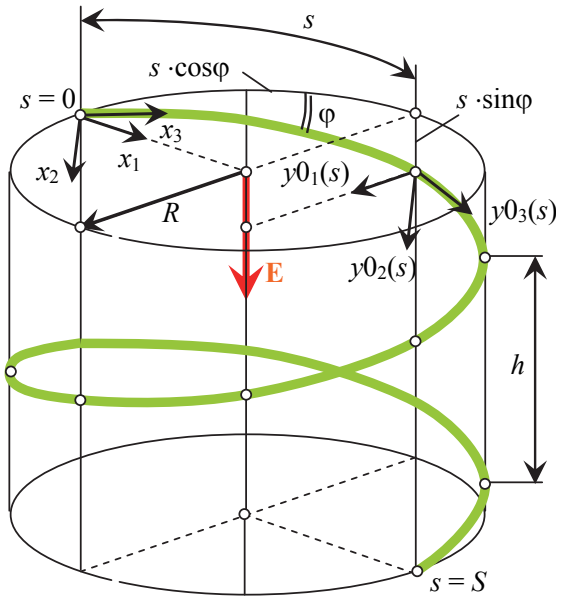


Рис. 7.3. Схема витой цилиндрической пружины

Определим бикватернион $\mathbf{\Psi 0}(s)$, переводящий неподвижную систему координат x_1, x_2, x_3 путем ее поворота вокруг оси винтового перемещения и линейного смещения вдоль этой оси до совпадения с подвижной системой $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$. Как видно из рисунка, единичный скользящий вектор $\mathbf{E}$, определяющий ось винтового перемещения, в неподвижной системе координат можно представить так:

$$\mathbf{E} = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad \cos\varphi - \varpi \cdot R \cdot \sin\varphi; \quad \sin\varphi + \varpi \cdot R \cdot \cos\varphi\right]. \tag{7.30}$$

Из рисунка видно, что неподвижную систему координат нужно повернуть вокруг единичного вектора $\mathbf{E}$ на угол $(s/R)\cdot\cos\varphi$ и поступательно переместить вдоль этого вектора на $s\cdot\sin\varphi$, чтобы она совпала с координатной системой $y0_1(s)$, $y0_2(s)$, $y0_3(s)$. Таким образом,

$$\Psi 0_{\bullet}(s) = \frac{s}{R} \cdot \cos\varphi + \varpi \cdot s \cdot \sin\varphi, \tag{7.31}$$

а искомый бикватернион

$$\mathbf{\Psi 0}(s) = \left[0 + \varpi \cdot 0; \quad 0 + \varpi \cdot 0; \quad \frac{s}{R} \cdot \cos^2\varphi + \varpi \cdot 0; \quad \frac{s}{R} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \varpi \cdot s\right]. \tag{7.32}$$

Приведем для дальнейшего использования половинный экспоненциальный бикватернион:

$$\mathbf{\Lambda 0}(s)=\exp\frac{\mathbf{\Psi 0}(s)}{2}=\begin{bmatrix}\cos\theta-\varpi\cdot\dfrac{s}{2}\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta\\ 0+\varpi\cdot 0\\ \cos\varphi\cdot\sin\theta\ +\varpi\cdot\dfrac{s}{2}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\left(\cos\theta-\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)\\ \sin\varphi\cdot\sin\theta+\varpi\cdot\dfrac{s}{2}\cdot\left(\sin^2\varphi\cdot\cos\theta+\cos^2\varphi\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)\end{bmatrix},\qquad(7.33)$$

где обозначено:

$$\theta=\frac{s\cdot\cos\varphi}{2\cdot R},\qquad(7.34)$$

а также его левую и правую мультипликативные производные:

$${}^{\times}\mathbf{\Lambda 0}(s)=\mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s)=\left[0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad\frac{\cos^2\varphi}{2\cdot R}+\varpi\cdot 0;\quad\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{2\cdot R}+\varpi\cdot\frac{1}{2}\right].\qquad(7.35)$$

Бикватернион локальной формы для этого исходного состояния имеет такой вид:

$${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{\Omega 0}(s)=\left[0+\varpi\cdot 0;\quad 0+\varpi\cdot 0;\quad\frac{\cos^2\varphi}{R}+\varpi\cdot 0;\quad\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{R}+\varpi\cdot 1\right].\qquad(7.36)$$

Заметим, что мультипликативные производные и бикватернион локальной формы, несмотря на сложные формулы для компонентов бикватерниона $\mathbf{\Lambda 0}(s)$, не зависят от дуговой координаты s.

7.5. Бикватернион перемещений

В дальнейшем будет рассматриваться бикватернион перемещений $\mathbf{\Phi}(s)$ и его половинный экспоненциальный бикватернион $\mathbf{M}(s)$, описывающие изменение формы проволоки в процессе ее деформирования. Такие же бикватернионы были введены в рассмотрение применительно к гибкому валу в разделе 6.6. Все рассуждения и формулы этого раздела целиком можно перенести на задачу об упругой проволоке. Поэтому повторять здесь мы их не будем, в необходимых случаях ссылаясь на формулы раздела 6.6. Укажем только, винт бикватерниона $\mathbf{\Phi}(s)$ переводит координатную систему $\mathbf{Y0}(s)$, связанную с сечением s исходного состояния проволоки, в координатную систему $\mathbf{Y}(s)$, связанную с сечением s деформированного состояния проволоки:

$$\mathbf{M}(s)=\mathbf{\Lambda}(s)\circ\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s);\quad\mathbf{\Phi}(s)=2\cdot\ln\mathbf{M}(s).\qquad(7.37)$$

Однако проволока, как объект механики, проще гибкого вала. У проволоки отсутствует сердечник и для проволоки мы пользуемся гипотезой Бернулли. Поэтому есть некоторые упрощения. В частности, в задаче о проволоке бикватернионы $\mathbf{\Psi 0}(s)$, $\mathbf{\Psi}(s)$ и $\mathbf{\Phi}(s)$ – чисто винтовые, а бикватернионы $\mathbf{\Lambda 0}(s)$, $\mathbf{\Lambda}(s)$ и $\mathbf{M}(s)$ – нормированные.

Более сложным является то, что изучаемый отрезок проволоки в отличие от гибкого вала в исходном состоянии может иметь произвольную форму. В разделе 7.4 мы записали бикватернионы, определяющие несколько исходных форм, среди которых есть даже витая цилиндрическая пружина.

7.6. Бикватернион деформаций

Так же, как и в разделе 6.7, вводится в рассмотрение бикватернион деформаций ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s)$, представляющий некоторую меру скорости изменения перемещений вдоль дуговой координаты. В общей системе координат бикватернион деформаций выражается через половинный экспоненциальный бикватернион $\mathbf{M}(s)$ по одной из эквивалентных формул:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) = 2 \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\ln\left[{}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s+\Delta s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{-1}(s) \right]}{\Delta s} = 2 \cdot {}^{\times}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}'(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{-1}(s) . \qquad (7.38) $$

Все необходимые пояснения и вывод формул читатель найдет в разделе 6.7. Для уяснения геометрического смысла и особенностей этого бикватерниона применительно к деформированию проволоки используем компоненты этого бикватерниона в системе координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s деформированной проволоки:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) . \qquad (7.39) $$

Первая особенность бикватерниона $\mathbf{K}(s)$ заключается в том, что он чисто винтовой. Для того, чтобы в этом убедиться, надо проследить формулы получения бикватерниона $\mathbf{K}(s)$, которые приведут к чисто винтовым бикватернионам $\mathbf{\Psi 0}(s)$ и $\mathbf{\Psi}(s)$. При этом надо помнить, что логарифм чисто винтового бикватерниона – нормированный бикватернион; экспонента нормированного бикватерниона – чисто винтовой бикватернион; произведение нормированных бикватернионов – нормированный бикватернион; обращение нормированного бикватерниона приводит к нормированному бикватерниону; чисто винтовой бикватернион в любой системе координат остается чисто винтовым.

Геометрический смысл компонентов бикватерниона ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$, представленного в системе координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s деформированного отрезка проволоки, таков:

${}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_1(s)$ – дополнительная кривизна проволоки относительно оси y_1;
${}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_2(s)$ – дополнительная кривизна проволоки относительно оси y_2;
${}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_3(s)$ – дополнительная кривизна кручения проволоки;
${}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}_1(s)$ – дополнительный сдвиг в направлении оси y_1;
${}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}_2(s)$ – дополнительный сдвиг в направлении оси y_2;
${}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}_3(s)$ – дополнительное относительное удлинение проволоки.

В этом списке слово "дополнительный, -ая, -ое" означает увеличение описанного фактора по отношению к исходному состоянию.

Следует отметить, что в разделе 7.1 мы приняли предположение о том, что проволока нерастяжима и не испытывает деформаций от поперечных усилий. Из этого предположения следует, что

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}{}_{j}(s) = 0 \quad (j = 1,2,3) . \tag{7.40} $$

Поскольку бикватернион $\mathbf{K}(s)$ – чисто винтовой, то и

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_{0}(s) = {}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}{}_{0}(s) = 0 . \tag{7.41} $$

Таким образом, в рассматриваемой задаче только три компонента бикватерниона деформаций отличны от нуля.

7.7. Геометрические уравнения

Геометрические уравнения, устанавливающие дифференциальные зависимости между перемещениями сечений проволоки, определяемыми бикватернионом $\mathbf{M}(s)$ или $\mathbf{\Lambda}(s)$, и ее деформациями, определяемыми бикватернионом $\mathbf{K}(s)$, являются частным случаем геометрических уравнений, выведенных для гибкого вала в разделе 6.8. Поэтому здесь даны лишь основные результаты. Дифференциальные уравнения приведены в двух формах: аддитивной и мультипликативной. Во всех уравнениях бикватернион деформаций ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$ приведен в системе координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s проволоки в деформированном состоянии, поскольку именно в этом виде он входит в физические уравнения. В уравнения входят бикватернионы, характеризующие исходную форму проволоки: ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(s)$ или ${}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s)$, которые должны быть заранее известны. Для нескольких наиболее употребительных форм они приведены в разделе 7.4.

Аддитивное (обычное) дифференциальное уравнение для бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s)$ в общей системе координат $\mathbf{X}$ выглядит так:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s)}{2} . \tag{7.42} $$

Мультипликативный аналог этого уравнения имеет следующий вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{\times}(s) = \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s)}{2} . \tag{7.43} $$

В разделе 6.8 для этого уравнения приводится общее решение. Запишем его здесь в таком виде:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0) \circ \overrightarrow{\prod_{0}^{s}} \exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y0}(\sigma)}\mathbf{\Omega 0}(\sigma) + {}_{\mathbf{Y}(\sigma)}\mathbf{K}(\sigma)}{2} \cdot d\sigma \right] \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s) , \tag{7.44} $$

где ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0)$ – произвольный постоянный бикватернион.

То же уравнение в подвижной системе $\mathbf{Y0}(s)$, связанной с сечением проволоки в исходном состоянии, имеет следующий вид:

$$ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}'(s) = {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s)}{2} \circ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s) . \tag{7.45} $$

Не выписывая мультипликативный аналог этого уравнения, покажем его общее решение:

$$ {}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0) \circ \overrightarrow{\prod_{0}^{s}} \exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y0}(\sigma)}\mathbf{\Omega 0}(\sigma) + {}_{\mathbf{Y}(\sigma)}\mathbf{K}(\sigma)}{2} \cdot d\sigma \right]. \tag{7.46} $$

Оно получено путем преобразования формулы (7.44). Произвольный постоянный бикватернион обозначен ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0)$, что соответствует его геометрическому смыслу.

Можно принять в качестве основного неизвестного бикватернион $\mathbf{\Lambda}(s)$, который определяет положение сечений деформированного гибкого вала. В разделе 6.8 для этого случая было выведено дифференциальное уравнение. Приведем здесь как аддитивную:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2}, \tag{7.47} $$

так и мультипликативную его форму:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2}. \tag{7.48} $$

Геометрические уравнения в переменных $\mathbf{\Lambda}(s)$ выглядят наиболее компактно. Общее решение этого уравнения имеет такой вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0) \circ \overrightarrow{\prod_{0}^{s}} \exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y0}(\sigma)}\mathbf{\Omega 0}(\sigma) + {}_{\mathbf{Y}(\sigma)}\mathbf{K}(\sigma)}{2} \cdot d\sigma \right]. \tag{7.49} $$

Как и в предыдущих случаях, – ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(0)$произвольный постоянный бикватернион.

Зная бикватернион перемещений $\mathbf{M}(s)$, можно по формуле (6.24) найти собственный бикватернион $\mathbf{\Lambda}(\mathrm{s})$, определяющий деформированное состояние проволоки. Бикватернион истинных эйлеровых перемещений определяется формулой:

$$ \mathbf{\Psi}(s) = 2 \cdot \mathrm{Ln}\, \mathbf{\Lambda}(s). \tag{7.50} $$

Уравнение оси деформированной проволоки можно получить через главный и моментный кватернионы ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s)$ собственного бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(\mathrm{s})$. Это параметрическое уравнение основано на формуле (4.178) и имеет вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(s). \tag{7.51} $$

Компоненты кватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ имеют следующий геометрический смысл: ${}_{\mathbf{X}}r_1(s)$, ${}_{\mathbf{X}}r_2(s)$, ${}_{\mathbf{X}}r_3(s)$ – координаты полюса сечения s в неподвижной системе координат; ${}_{\mathbf{X}}r_0(s) = 0$.

Часто бывает более удобно работать с декартовыми координатами оси проволоки, чем с винтовыми координатами ее сечений. Поэтому запишем еще один вид геометрических уравнений, где основными неизвестными будут кватернионы ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$, представленные в общей системе координат $\mathbf{X}$. Первый из них является главным кватернионом бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$ и отвечает за ориентацию сечения s, а второй есть радиусом-вектором центра этого сечения в общей системе координат и выража-

ется через кватернионные компоненты бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$ по формуле (7.51). Первый из них – нормированный, второй – чисто векторный.

Для того, чтобы вывести нужные формулы, распишем покватернионно дифференциальное уравнение (7.47), помня о том, что ${}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} = \mathbf{o}$:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}(s) + {}_{\mathbf{Y0}(s)}\boldsymbol{\omega 0}(s)}{2}; \tag{7.52} $$

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ\prime}(s) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}(s) + {}_{\mathbf{Y0}(s)}\boldsymbol{\omega 0}(s)}{2} + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ}(s)}{2}. \tag{7.53} $$

Во втором равенстве выполним замену переменной ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s)$ на переменную ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$, воспользовавшись формулой (7.51). Дифференцируя вытекающую из нее зависимость:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s) \tag{7.54} $$

по дуговой координате s, получим:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}'(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(s) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ\prime}(s). \tag{7.55} $$

Подставляя сюда выражения для производных из формул (7.52) и (7.53), после несложных преобразований получим компактное дифференциальное уравнение:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) \circ {}_{\mathbf{Y}0(s)}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(s), \tag{7.56} $$

которое совместно с дифференциальным уравнением (7.52) составляет геометрические уравнения в переменных ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$.

Заметим, что уравнение (7.52) зависит от исходной формы проволоки, поскольку в него входит кватернион начальной кривизны ${}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\omega 0}(s)$, а уравнение (7.56) – не зависит, поскольку ${}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} = [0, 0, 0, 1]$ для любой исходной формы проволоки (см. раздел 7.4).

7.8. Бикватернион внутренних усилий

Так же, как и в случае гибкого вала, внутренние усилия проволоки могут быть представлены одной чисто винтовой бикватернионной функцией $\mathbf{U}(s)$. В системе координат, связанной с сечением s деформированной проволоки, компоненты этого бикватерниона имеют следующий механический смысл:

u_1 – поперечная сила, направленная вдоль координатной оси y_1;
u_2 – поперечная сила, направленная вдоль координатной оси y_2;
u_3 – продольная сила, направленная вдоль координатной оси y_3;
u°_1 – изгибающий момент, действующий вокруг координатной оси y_1;
u°_2 – изгибающий момент, действующий вокруг координатной оси y_2;
u°_3 – крутящий момент, действующий вокруг координатной оси y_3.

Для краткости письма при перечисленных компонентах кватерниона опущен левый нижний индекс, указывающий на координатную систему $\mathbf{Y}(s)$, и не показана функциональная зависимость этих компонентов от координаты s.

7.9. Статические уравнения

Рассмотрим участок проволоки, находящийся между дуговыми координатами s и $s + \Delta s$ (рис. 7.4). Отделим этот участок от остальной проволоки, заменив действие отброшенных частей усилиями $_{\mathbf{Y}(s+\Delta s)}\mathbf{u}(s+\Delta s)$ и $_{\mathbf{Y}(s+\Delta s)}\mathbf{u}^{\circ}(s+\Delta s)$ в конце участка и усилиями $-{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{u}(s)$ и $-{}_{\mathbf{Y}(s0}\mathbf{u}^{\circ}(s)$ в начале участка. Равновесие этого участка будет соблюдаться при условии, если геометрическая сумма сил, приложенных к рассматриваемому участку, и геометрическая сумма моментов, приложенных к нему, относительно какой-то фиксированной точки будет равна нулю. В качестве этой точки выберем начало неподвижной системы координат и запишем условие равновесия:

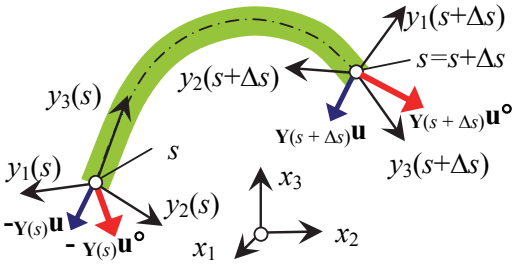


Рис. 7.4. Равновесие участка проволоки

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(s+\Delta s) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(s) = 0; \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{\circ}(s+\Delta s) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{u}^{\circ}(s) = 0\,. \tag{7.57}$$

Нетрудно заметить, что эти два чисто векторных кватернионных равенства эквивалентны одному чисто винтовому бикватернионному равенству:

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s+\Delta s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s) \tag{7.58}$$

или в пределе:

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{U}'(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s+\Delta s) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}(s)}{\Delta s} = \mathbf{O}\,. \tag{7.59}$$

Из него следует, что равновесие проволоки соблюдается, если бикватернион внутренних усилий $_{\mathbf{X}}\mathbf{U}$ в общей системе координат постоянен по всей длине проволоки, то есть не зависит от дуговой координаты s. Так же, как и в случае гибкого вала, бикватернион внутренних усилий можно рассматривать как силовой винт, ось которого называется осью системы сил, действующих на отрезок проволоки. Главный вектор и главный момент этой системы сил, определяемые бикватернионом, направлены вдоль оси винта.

Если, кроме $_{\mathbf{X}}\mathbf{U}$, известен собственный (половинный экспоненциальный) бикватернион $\mathbf{\Lambda}(s)$ как функция дуговой координаты s, то внутренние усилия в проволоке могут быть выражены формулой:

$$_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)\,. \tag{7.60}$$

Напомним, что компоненты собственного бикватерниона одинаковы как в общей, так и в местной системе координат, привязанной к сечению s.

Если бикватернион внутренних усилий $_{\mathbf{X}}\mathbf{U}$ в общей системе координат не зависит от дуговой координаты s, то его представление в местной системе координат $_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ является функцией s, и для него можно записать дифференциальную зависимость. Для этого продифференцируем равенство (7.60):

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s) &= ({}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1})'(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = \\
&= -{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s) + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s).
\end{aligned}
\tag{7.61}
$$

Здесь мы воспользовались зависимостью:

$$
({}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1})'(s) = -{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\,. \tag{7.62}
$$

В результате, пользуясь формулой (7.60), получим:

$$
{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s) = -{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s)\circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s)\,. \tag{7.63}
$$

Далее обратимся к формуле (7.47) и запишем окончательно:

$$
{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s) = {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)\circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2}\circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)\,. \tag{7.64}
$$

Это и есть дифференциальное уравнение равновесия для внутренних усилий, представленных в системе координат, связанной с сечением s деформированной проволоки. Заметим, что бикватернионы ${}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s)$, характеризующие исходную форму проволоки, для распространенных случаев приведены в разделе 7.4. Для этих случаев они не зависят от дуговой координаты s и являются константами.

7.10. Физические уравнения

Под физическими уравнениями будем подразумевать зависимости между внутренними усилиями ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$, действующими в сечении проволоки с координатой s, и ее деформациями ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$ в окрестности этого же сечения.

Из курса сопротивления материалов известно, что кривизны поперечных сечений упругого стержня при изменении дуговой координаты s пропорциональны внутренним моментам ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{u}^{\circ}(s)$ и выражаются формулами:

$$
{}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_1(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}u^{\circ}{}_1(s)}{E\cdot J};\quad {}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_2(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}u^{\circ}{}_2(s)}{E\cdot J};\quad {}_{\mathbf{Y}(s)}\kappa_3 = \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}u^{\circ}{}_3(s)}{G\cdot J_p}\,, \tag{7.65}
$$

где G – модуль сдвига, E – модуль упругости, J_p – полярный момент инерции сечения,

J – аксиальный момент инерции сечения.

Поперечное сечение проволоки имеет форму круга. Моменты инерции для круга радиуса r выражаются формулами:

$$
J_p = \frac{\pi\cdot r^4}{2};\quad J = \frac{\pi\cdot r^4}{4}\,. \tag{7.66}
$$

Модуль сдвига, как известно, выражается через модуль упругости по формуле:

$$
G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}\,, \tag{7.67}
$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Сравнивая крутильную жесткость проволоки $G{\cdot}J_p$ с ее изгибной жесткостью $E{\cdot}J$, замечаем, что эти жесткости близки между собой, а при $\nu = 0$ совпадают. Поэтому, следуя другим авторам [5], будем считать их равными, обозначать буквой D и вычислять по формуле:

$$D = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot E}{4}. \tag{7.68}$$

С учетом этого физические уравнения (7.65) приобретут вид:

$$_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}(s) = \frac{_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{u}^{\circ}(s)}{D}. \tag{7.69}$$

Компоненты кватерниона деформаций моментной группы равны нулю:

$$_{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}_{1} = 0; \quad _{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}_{2} = 0; \quad _{\mathbf{Y}(s)}\kappa^{\circ}_{3} = 0. \tag{7.70}$$

7.11. Некоторые предварительные итоги

Подводя итоги предыдущего изложения, отметим, что рассматриваемая задача изучает отрезок проволоки, который в исходном состоянии может иметь форму, отличную от прямолинейной. Эта форма характеризуется заранее известным чисто винтовым бикватернионом $\boldsymbol{\Psi 0}(s)$, который определяет положение любого сечения исследуемого отрезка проволоки в исходном состоянии по следующему правилу. Винт бикватерниона $\boldsymbol{\Psi 0}(s)$ перемещает общую систему координат $\mathbf{X}$ в положение, где она совпадает с системой координат $\mathbf{Y0}(s)$, связанной с сечением s. Деформированное состояние исследуемого отрезка проволоки определяется чисто винтовым бикватернионом $\boldsymbol{\Psi}(s)$, винт которого перемещает общую систему координат $\mathbf{X}$ в положение, где она совпадает с системой координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s. Этот бикватернион подлежит определению. Для вспомогательных целей используется чисто винтовой бикватернион перемещений $\boldsymbol{\Phi}(s)$, который перемещает систему координат $\mathbf{Y0}(s)$ в положение, где она совпадает с системой координат $\mathbf{Y}(s)$.

При выводе формул используются половинные экспоненциальные функции этих кватернионов $\boldsymbol{\Lambda 0}(s)$, $\boldsymbol{\Lambda}(s)$ и $\mathbf{M}(s)$, определяемые формулами (6.23). Поскольку породившие их бикватернионы являются чисто винтовыми, бикватернионы $\boldsymbol{\Lambda 0}(s)$, $\boldsymbol{\Lambda}(s)$ и $\mathbf{M}(s)$ являются нормированными. Кроме половинных экспоненциальных используется еще один набор чисто винтовых бикватернионов, определяющих локальную форму проволоки вблизи рассматриваемого сечения, а именно бикватернионы $\boldsymbol{\Omega 0}(s)$, $\boldsymbol{\Omega}(s)$ и $\mathbf{K}(s)$. Эти бикватернионы удобны для понимания и для использования, будучи представленными в местных системах координат, связанных с сечением проволоки. Компоненты их главных кватернионов $\boldsymbol{\omega 0}(s)$, $\boldsymbol{\omega}(s)$ и $\boldsymbol{\kappa}(s)$ в этих системах координат представляют собой кривизны оси проволоки, компоненты их моментных кватернионов – константы простого вида:

$$_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} = {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} = [0,0,0,1]; \quad {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} = [0,0,0,0]. \tag{7.71}$$

Сами бикватернионы связаны с порождающими их следующими формулами:

$$_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) = 2\cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}'(s) = 2\cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{\times}(s); \tag{7.72}$$

$$_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{\Omega}(s) = 2\cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = 2\cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(s); \tag{7.73}$$

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{K}(s) = 2\cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}'(s)\circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}^{-1}(s) = 2\cdot {}^{\times}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(s). \tag{7.74}$$

В этих формулах присутствуют аддитивные и мультипликативные производные порождающих бикватернионов. По существу, формулы (7.73) и (7.74) являются основой для написания геометрических уравнений и в аддитивной, и в мультипликативной форме. Бикватернион $\mathbf{K}(s)$ несколько отличается от двух других бикватернионов. Он называется бикватернионом деформаций и показывает, какие дополнительные кривизны приобретает проволока при переходе от исходного к деформированному состоянию. Моментная часть этого бикватерниона полностью нулевая, что приводит к упрощениям при переходе от бикватернионной к кватернионной записи.

Бикватернион внутренних усилий $_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ – чисто винтовой. Это самые обычные внутренние усилия в сечении s. Компоненты главной части этого бикватерниона – это два поперечных и продольное усилие, компоненты моментной части этого бикватерниона – два изгибающих и крутящий момент. Этот же бикватернион может быть представлен и в общей системе координат. В этом случае его компоненты – проекции внутренних усилий на оси общей системы координат и моменты этих усилий относительно осей общей системы координат.

Переменные, описанные выше, связаны между собой. Наиболее важными являются геометрические уравнения, которые связывают между собой перемещения, представленные бикватернионом $\mathbf{M}(s)$ или $\mathbf{\Lambda}(s)$, и деформации, представленные бикватернионом $\mathbf{K}(s)$. Практическое значение имеет уравнение (7.47) для определения $\mathbf{\Lambda}(s)$:

$$_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)\circ\frac{_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{\Omega 0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2}. \tag{7.75}$$

Это – бикватернионное дифференциальное уравнение первого порядка. Несмотря на то, что каждый из взаимосвязаных бикватернионов содержит в себе восемь компонентов, уравнение эквивалентно не восьми, а шести скалярным дифференциальным уравнениям. Бикватернион $\mathbf{K}(s)$ является чисто винтовым, и два компонента его дуальной части равны нулю. Бикватернион $\mathbf{\Lambda}(s)$ – нормированный. Его компоненты не являются независимыми, а связаны двумя алгебраическими зависимостями (7.7), то есть, по существу, в нем представлены шесть независимых скалярных величин.

В разделе 7.7 геометрические уравнения представлены в двух видах: аддитивном и мультипликативном. Мультипликативное представление позволяет записать общее решение уравнения в виде мультипликативной квадратуры, умноженной на произвольный постоянный бикватернион $\mathbf{\Lambda}(0)$. Этот бикватернион по своему геометрическому смыслу определяет положение в пространстве начального сечения проволоки, то есть сечения с дуговой координатой $s = 0$. Конструктивно это положение определяется путем перемещения неподвижной системы координат чисто винтовым биква-

тернионом $\boldsymbol{\Psi}(0)$ и, по существу, произвольным постоянным является этот бикватернион, имеющий шесть независимых скалярных произвольных постоянных величин.

Вторым по значимости является дифференциальное уравнение равновесия (7.64), которое связывает бикватернионы усилий ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ и деформаций ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$, представленные в местной системе координат:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}'(s) = {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}(s)}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{0}(s) + {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)}{2} \circ {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s) . \qquad (7.76) $$

Оно также эквивалентно не восьми, а шести скалярным дифференциальным уравнениям, поскольку все бикватернионы, входящие в его состав – чисто винтовые. Общее решение этого дифференциального уравнения содержит шесть независимых скалярных произвольных постоянных величин.

Кроме этого, есть физические уравнения, связывающие внутренние усилия и деформации. Эти уравнения получены в разделе 7.10 и имеют следующий вид:

$$ {}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}(s) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{u}^{\circ}(s)}{D}; \quad {}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}^{\circ}(s) = \mathbf{o} = \left[0, 0, 0, 0\right]; \quad {}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K} = {}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}(s) + \boldsymbol{\varpi} \cdot {}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}^{\circ}(s) . \qquad (7.77) $$

Основной кватернион ${}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}(s)$ бикватерниона ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$ связан с моментным кватернионом внутренних усилий ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{u}^{\circ}(s)$ алгебраической зависимостью. Эта зависимость эквивалентна трем скалярным, поскольку входящие в нее кватернионы являются чисто векторными. Моментный кватернион ${}_{\mathbf{Y}(s)}\boldsymbol{\kappa}^{\circ}(s)$ является нулевым благодаря принятому предположению о том, что проволока бесконечно жестка на сдвиг и на растяжение.

Таким образом, уравнения (7.75)–(7.77) составляют полную систему разрешающих уравнений для нахождения $\boldsymbol{\Lambda}(s)$, ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{U}(s)$ и ${}_{\mathbf{Y}(s)}\mathbf{K}(s)$. Двенадцать скалярных произвольных постоянных надо использовать для удовлетворения граничным условиям.

7.12. Метод усилий

Если в дифференциальное уравнение (7.76) подставить выражения для деформаций из формул (7.77), то придем к дифференциальным зависимостям, в которых неизвестными будут только внутренние усилия. Ввиду того, что в формулах (7.77) основной и моментный кватернионы подчиняются разного вида зависимостям, бикватернионное дифференциальное уравнение записать не удается. Зато можно записать два кватернионных дифференциальных уравнения.

Для этого распишем покватернионно дифференциальное уравнение (7.76):

$$ \mathbf{u}' + \boldsymbol{\varpi} \cdot \mathbf{u}^{\circ\prime} = (\mathbf{u} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \mathbf{u}^{\circ}) \circ \frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ} + \boldsymbol{\kappa}}{2} - \frac{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ} + \boldsymbol{\kappa}}{2} \circ (\mathbf{u} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \mathbf{u}^{\circ}) . \qquad (7.78) $$

Для краткости письма здесь и далее опущены ссылки на зависимость величин от дуговой координаты s и указание координатной системы. Кватернионы $\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}$ заданы в системе координат $\mathbf{Y0}$, остальные – в системе координат $\mathbf{Y}$.

Подставляя $\boldsymbol{\kappa}$ из формул (7.77) и разделяя основную и моментную части, после коротких преобразований получим:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\circ\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{0}\circ\mathbf{u}}{2} + \frac{\mathbf{u}\circ\mathbf{u}^\circ - \mathbf{u}^\circ\circ\mathbf{u}}{2\cdot D};\quad \mathbf{u}^{\circ\prime} = \frac{\mathbf{u}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} - \boldsymbol{\omega}\mathbf{0}\circ\mathbf{u}^\circ}{2} + \frac{\mathbf{u}\circ\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^\circ - \boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^\circ\circ\mathbf{u}}{2}. \qquad (7.79)$$

Они несложно выглядят и будучи записанными покомпонентно:

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2\cdot\omega 0_3 - \omega 0_2\cdot u_3 \\ u_3\cdot\omega 0_1 - \omega 0_3\cdot u_1 \\ u_1\cdot\omega 0_2 - \omega 0_1\cdot u_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{D}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ u_2\cdot u_3{}^\circ - u_2{}^\circ\cdot u_3 \\ u_3\cdot u_1{}^\circ - u_3{}^\circ\cdot u_1 \\ u_1\cdot u_2{}^\circ - u_1{}^\circ\cdot u_2 \end{bmatrix};\mathbf{u}^{\circ\prime} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2{}^\circ\cdot\omega 0_3 - \omega 0_2\cdot u_3{}^\circ \\ u_3{}^\circ\cdot\omega 0_1 - \omega 0_3\cdot u_1{}^\circ \\ u_1{}^\circ\cdot\omega 0_2 - \omega 0_1\cdot u_2{}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.80)$$

Здесь учтено, что $\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^\circ = [0, 0, 0, 1]$.

Полученные дифференциальные уравнения содержат в качестве неизвестных только внутренние усилия. Общее решение этой системы уравнений содержит шесть произвольных постоянных величин. Поэтому, если проволока закреплена так, что шесть граничных условий выражены через внутренние усилия (в местной системе координат), задача об определении внутренних усилий в проволоке решается независимо от ее положения в пространстве. Если внутренние усилия определены, то по формулам (7.77) можно определить деформации. При известных деформациях дифференциальные уравнения (7.75) могут быть решены автономно. В результате их решения станет известным деформированное состояние проволоки.

Уравнения (7.79) и (7.80) позволяют изучать отрезки проволоки, имеющие в исходном состоянии любую форму. Если исходная форма проволоки прямолинейна, уравнения упрощаются. Для этого надо учесть, что $\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} = \mathbf{o} = [0, 0, 0, 0]$. Тогда получим:

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{D}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ u_2\cdot u_3{}^\circ - u_2{}^\circ\cdot u_3 \\ u_3\cdot u_1{}^\circ - u_3{}^\circ\cdot u_1 \\ u_1\cdot u_2{}^\circ - u_1{}^\circ\cdot u_2 \end{bmatrix};\quad \mathbf{u}^{\circ\prime} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.81)$$

Среди уравнений этой системы выделяется уравнение:

$$u_3{}^{\circ\prime} = 0. \qquad (7.82)$$

Это уравнение означает, что отрезок первоначально прямолинейной проволоки, нагруженный только на концах, принимает такую форму, что крутящий момент в этой проволоке постоянен по всей длине отрезка.

7.13. Метод перемещений

Обращаясь к разделу 7.9, отметим, что каждой равновесной форме проволоки соответствует свой силовой винт, который можно рассматривать как набор из шести произвольных постоянных в общем решении системы дифференциальных уравнений (7.75)–(7.77). Эти произвольные постоянные являются компонентами чисто винтового бикватерниона $_{\mathbf{X}}\mathbf{U}$, не зависящего от дуговой координаты s. Для большей наглядности формул будем обозначать этот бикватернион $\mathbf{C}$. В этих обозначениях формула (7.60) будет иметь вид:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{U}(s) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1} \circ \mathbf{C} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda} . \tag{7.83} $$

Пользуясь формулами (7.77) и (7.83), выразим кватернион деформаций ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}$ через константы $\mathbf{C}$ и компоненты бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}$:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ \frac{\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ \mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}}{D}; \quad {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} = \mathbf{o} . \tag{7.84} $$

Если в дифференциальное уравнение (7.75) подставить выражения для деформаций из формул (7.84), то после некоторых преобразований можно получить дифференциальные уравнения, в которых неизвестными будут только компоненты бикватерниона $\mathbf{\Lambda}$. Из-за того, что в формулах (7.84) основной и моментный кватернионы подчиняются разного вида зависимостям, бикватернионное дифференциальное уравнение записать не удается. Вместо него можно записать два кватернионных дифференциальных уравнения:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}' = \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega 0}}{2} + \frac{\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ \mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}}{2 \cdot D}; \tag{7.85} $$

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ\prime} = \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega 0}}{2} + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ \frac{\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ \mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}}{2 \cdot D} . \tag{7.86} $$

Уравнения метода перемещений оказались более сложными, чем уравнения метода усилий. В случае первоначально прямолинейной проволоки они несколько упрощаются.

7.14. Задача оптимального управления и принцип максимума Понтрягина

В этом разделе конспективно изложим правила построения системы разрешающих уравнений для одномерных механических задач, частным случаем которых является задача о форме, которую приобретает отрезок проволоки от внешних воздействий на его концах. Будем трактовать поставленную задачу как задачу оптимального управления [6], [27], [33], [54].

В задачах оптимального управления состояние системы характеризуется n переменными состояния $x_1(s),..., x_n(s)$, удовлетворяющими n дифференциальным уравнениям:

$$ \frac{dx_i(s)}{ds} = f_i\left[x_1(s),...,x_n(s);u_1(s),...,u_r(s)\right] \quad (i = 1,..., n) . \tag{7.87} $$

Функции f должны быть непрерывно дифференцируемы по x и непрерывны по u.

Независимой переменной в задаче является координата s, изменяющаяся в интервале $0 \le s \le S$ и имеющая обычно размерность длины. В дифференциальных уравнениях присутствуют так называемые управляющие переменные $u_1(s),...,\ u_r(s)$. Задача состоит в определении оптимальных значений управляющих переменных $u^*_1(s),..., u^*_r(s)$, минимизирующих заданный критерий:

$$ \Pi = \int_0^S f_0\left[x_1(s),...,x_n(s);u_1(s),...,u_r(s)\right] \cdot ds + \varphi 0_0\left[x_1(0),...,x_n(0)\right] + \varphi S_0\left[x_1(S),...,x_n(S)\right] . \tag{7.88} $$

Обычно в качестве этого критерия выступает потенциальная или полная энергия системы. Первое слагаемое (интегральная часть критерия) характеризует качество (упругий потенциал) системы на всем интервале управления [0, *S*], а второе и третье слагаемые (терминальная часть) – ее качество (потенциал нагрузок) в начальной (*s* = 0) и в конечной (*s* = *S*) точках интервала управления. Такая задача оптимального управления была сформулирована в 1913 году Оскаром Больцей и носит его имя. Терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На систему, как правило, накладываются ограничения в форме краевых условий:

$$\varphi 0_j\left[x_1(0),...,x_n(0)\right]=0(j=1,...,m0\le n);\varphi S_j\left[x_1(S),...,x_n(S)\right]=0(j=1,...,mS\le n). \quad (7.89)$$

Функции этих ограничений должны быть непрерывно дифференцируемы и функционально независимы. Функциональная независимость выражается в том, что ранги матриц

$$\frac{\partial\varphi 0_j\left[x_1(0),...,x_n(0)\right]}{\partial x_i(0)}(j=1,...,m0);\frac{\partial\varphi S_j\left[x_1(S),...,x_n(S)\right]}{\partial x_i(S)}(j=1,...,mS);(i=1,...,n) \quad (7.90)$$

соответственно равны *m*0 и *mS*.

Координата *S* может быть известна – (система фиксированной длины) или не известна – (система произвольной длины).

Необходимое условие оптимального управления выражается принципом максимума Понтрягина. Для формулировки этого принципа введем в рассмотрение сопряженные функции $p_0(s)$, ..., $p_n(s)$ (для каждой переменной состояния – своя функция) и запишем выражение для гамильтониана:

$$H\left[x_1(s),...,x_n(s);p_1(s),...,p_n(s);u_1(s),...,u_r(s)\right]=\sum_{i=0}^{n}p_i(s)\cdot f_i\left[x_1(s),...,x_n(s);u_1(s),...,u_r(s)\right], \quad (7.91)$$

где $p_0(s)\equiv -1$.

Тогда оптимальное управление, минимизирующее функционал (7.88), реализуется управляющими переменными $u^*_1(s)$, ..., $u^*_r(s)$, которые максимизируют гамильтониан (7.91) для каждого *s* в интервале $0 \le s \le S$. Для случая, когда на управляющие переменные не наложены никакие ограничения (наш случай), их оптимальные значения $u^*_1(s)$, ..., $u^*_r(s)$ могут быть найдены из условий стационарности гамильтониана для каждой координаты *s*:

$$\frac{\partial H\left[x_1(s),...,x_n(s);p_1(s),...,p_n(s);u_1(s),...,u_r(s)\right]}{\partial u_k(s)}=0 \quad (k=1,...r). \quad (7.92)$$

Подойдут те значения, которые максимизируют гамильтониан, то есть те, для которых матрица Гессе:

$$\frac{\partial^2 H\left[x_1(s),...,x_n(s);p_1(s),...,p_n(s);u_1(s),...,u_r(s)\right]}{\partial u_k(s)\cdot\partial u_l(s)} \quad (k,l=1,...r) \quad (7.93)$$

отрицательно определена или отрицательно полуопределена.

Иногда бывает, что оптимальные значения $u^*_1(s)$, ..., $u^*_r(s)$ можно выразить из уравнений (7.92) в виде замкнутой формулы (наш случай):

$$u^*_j(s) = u^*_j\left[x_1(s),...,x_n(s); p_1(s),...,p_n(s)\right] \quad (j = 1,..., m). \tag{7.94}$$

Тогда эти значения следует подставить в выражение для гамильтониана (7.91) и получить оптимальный гамильтониан H^*, значение которого (для автономных систем, когда гамильтониан не зависит явно от s, – наш случай) будет равным константе:

$$H^*\left[x_1(s),...,x_n(s); p_1(s),...,p_n(s)\right] = H\left[x_1(s),...,x_n(s); p_1(s),...,p_n(s); u^*_1(s),...,u^*_r(s)\right] = C \tag{7.95}$$

для всех s в интервале $0 \le s \le S$.

Для определения неизвестных функций $x_1(s)$,..., $x_n(s)$; $p_1(s)$,..., $p_n(s)$ можем выписать две системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Они получаются в результате дифференцирования оптимального гамильтониана по разным переменным. Одна из систем, называемая основной:

$$\frac{dx_i(s)}{ds} = \frac{\partial H^*\left[x_1(s),...,x_n(s); p_1(s),...,p_n(s)\right]}{\partial p_i(s)} \quad (i = 1,..., n), \tag{7.96}$$

фактически дублирует систему (7.87), в которую подставлены оптимальные значения $u^*_1(s)$, ..., $u^*_r(s)$, а другая система – новая:

$$\frac{dp_i(s)}{ds} = -\frac{\partial H^*\left[x_1(s),...,x_n(s); p_1(s),...,p_n(s)\right]}{\partial x_i(s)} \quad (i = 1,..., n), \tag{7.97}$$

называемая сопряженной системой.

Общее решение каждой из этих систем дифференциальных уравнений содержит по n произвольных постоянных, которые должны быть выбраны так, чтобы функции $x_1(s)$, ..., $x_n(s)$; $p_1(s)$, ..., $p_n(s)$ удовлетворяли краевым условиям. Для их определения надо ввести в рассмотрение множители Лагранжа, сопряженные с функциями $\varphi 0_0$, ..., $\varphi 0_{m0}$; φS_0, ..., φS_{mS}. Назовем их $\mu 0_0$, ..., $\mu 0_{m0}$; μS_0, ..., μS_{mS}. Составим с их участием гамильтонианы краевых условий:

$$\begin{aligned} h0\left[\mu 0_1,...,\mu 0_{m0}; x_1(0),...,x_n(0)\right] &= \sum_{j=0}^{m0} \mu 0_j \cdot \varphi 0_j\left[x_1(0),...,x_n(0)\right]; \\ hS\left[\mu S_1,...,\mu S_{mS}; x_1(S),...,x_n(S)\right] &= \sum_{j=0}^{mS} \mu S_j \cdot \varphi S_j\left[x_1(S),...,x_n(S)\right], \end{aligned} \tag{7.98}$$

где принято $\mu 0_0 = \mu S_0 = 1$.

На основании этих гамильтонианов можно составить систему, состоящую из $m0 + mS + 2{\cdot}n$ алгебраических уравнений, из которой можно определить $m0 + mS$ множителей Лагранжа $\mu 0_1$, ..., $\mu 0_{m0}$; μS_1, ..., μS_{mS} и $2{\cdot}n$ постоянных интегрирования для двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial h0\left[\mu 0_1,...,\mu 0_{m0};x_1(0),...,x_n(0)\right]}{\partial \mu 0_j}=\varphi 0_j\left[x_1(0),...,x_n(0)\right]=0 \quad (j=1,...,m0); \tag{7.99}$$

$$\frac{\partial hS\left[\mu S_1,...,\mu S_{mS};x_1(S),...,x_n(S)\right]}{\partial \mu S_j}=\varphi S_j\left[x_1(S),...,x_n(S)\right]=0 \quad (j=1,...,mS); \tag{7.100}$$

$$p_i(0)=-\frac{\partial h0\left[\mu 0_1,...,\mu 0_{m0};x_1(0),...,x_n(0)\right]}{\partial x_i(0)}=-\sum_{j=0}^{m0}\mu 0_j\cdot\frac{\partial \varphi 0_j\left[x_1(0),...,x_n(0)\right]}{\partial x_i(0)}(i=1,...,n); \tag{7.101}$$

$$p_i(S)=\frac{\partial hS\left[\mu S_1,...,\mu S_m;x_1(S),...,x_n(S)\right]}{\partial x_i(S)}=\sum_{j=0}^{mS}\mu S_j\cdot\frac{\partial \varphi S_j\left[x_1(S),...,x_n(S)\right]}{\partial x_i(S)}(i=1,...,n). \tag{7.102}$$

Первая часть этой системы – формулы (7.99) и (7.100) – повторяют формулы (7.89). Вторая часть – формулы (7.101) и (7.102) – новые, называемые условиями трансверсальности.

Если в задаче максимальное значение независимой координаты S не задано, его можно найти, добавив к системе (7.99), (7.100), (7.101) и (7.102) еще одно уравнение:

$$H^*\left[x_1(S),...,x_n(S);p_1(S),...,p_n(S)\right]=0. \tag{7.103}$$

7.15. Условия трансверсальности при линейных ограничениях

Для лучшего понимания того, каким условиям должны удовлетворять начальные ($s = 0$) и конечные ($s = S$) значения функций $x_i(s)$ и $p_i(s)$ ($i = 1, ..., n$), рассмотрим случай, когда функции $\varphi 0$ и φS в формулах (7.88) и (7.89) линейны:

$$\varphi 0_j=a0_{j0}+\sum_{i=1}^{n}a0_{ji}\cdot x_i(0);(j=0,...,m0);\ \varphi S_j=aS_{j0}+\sum_{i=1}^{n}aS_{ji}\cdot x_i(S);(j=1,...,mS). \tag{7.104}$$

Эта ситуация имеет не только теоретическое, но и практическое значение. Она реализуется, когда концы проволоки закреплены связями, направленными не вдоль координатных осей, а под углом к ним.

В этом случае система алгебраических уравнений (7.99), (7.100), (7.101), (7.102) будет линейной. Она распадается на две независимые системы уравнений. Одна из них относится к началу отрезка интегрирования ($s = 0$), а другая – к концу этого отрезка ($s = S$).

Запишем первую из них, соответствующую формулам (7.99) и (7.101):

$$0=a0_{j0}+\sum_{i=1}^{n}a0_{ji}\cdot x_i(0); \quad (j=1,...,m0); \quad p_i(0)=-\sum_{j=0}^{m0}\mu 0_j\cdot a0_{ji}; \quad (i=1,...,n). \tag{7.105}$$

Вторая из формул имеет такой вид, поскольку

$$\frac{\partial \varphi 0_j\left[x_1(0),...,x_n(0)\right]}{\partial x_i(0)}=a0_{ji}; \quad (j=0,...,m0; \quad i=1,...,n). \tag{7.106}$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся методикой жордановых исключений, подробно описанной в работе [24]. Эта методика позволяет преобразовывать заданные линейные зависимости между двумя группами переменных, одна из которых представляет собою независимые переменные – аргументы, а вторая группа – зависимые переменные – функции. Преобразование позволяет исключить некоторое подмножество переменных из состава аргументов и перевести их в состав функций. В это же время такое же число переменных-функций переводится в число аргументов. Все преобразования выполняются в таблице фиксированного размера.

Представим линейные зависимости (7.105) в виде таблицы:

	1	$\mu 0_1$	...	$\mu 0_{m0}$	$x_1(0)$	...	$x_{m0}(0)$	$x_{m0+1}(0)$	...	$x_n(0)$
$0 =$	$a0_{1,0}$	0	...	0	$a0_{1,1}$	...	$a0_{1,m0}$	$a0_{1,m0+1}$	...	$a0_{1,n}$
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$0 =$	$a0_{m0,0}$	0	...	0	$a0_{m0,1}$	...	$a0_{m0,m0}$	$a0_{m0,m0+1}$	...	$a0_{m0,n}$
$p_1(0) =$	$-a0_{0,1}$	$-a0_{1,1}$	...	$-a0_{m0,1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_{m0}(0) =$	$-a0_{0,m0}$	$-a0_{1,m0}$	...	$-a0_{m0,m0}$	0	...	0	0	...	0
$p_{m0+1}(0) =$	$-a0_{0,m0+1}$	$-a0_{1,m0+1}$	...	$-a0_{m0,m0+1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_n(0) =$	$-a0_{0,n}$	$-a0_{1,n}$	...	$-a0_{m0,n}$	0	...	0	0	...	0

Таблицу следует считать матрицей (назовем ее **A**). Слева от таблицы расположен вектор-столбец переменных функций (назовем его **p**). Над таблицей находится вектор-столбец переменных-аргументов (назовем его **x**), записанный в транспонированном виде. Линейные зависимости в матрично-векторной записи следует понимать так: $\mathbf{p} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$. Очевидно, что приведенная выше таблица представляет обе группы линейных зависимостей (7.105).

Выполним групповой шаг жорданова исключения с разрешающей клеткой:

$a0_{1,1}$	...	$a0_{1,m0}$
...	...	...
$a0_{m0,1}$	...	$a0_{m0,m0}$

Будем полагать, что переменные $x(0)$ пронумерованы так, что детерминант этой клетки отличен от нуля, что требуется для выполнимости шага жорданова исключения. Этого можно добиться, поскольку набор $\varphi 0_j$ функционально независим.

В результате выполнения этого шага получим новую таблицу:

	1	$\mu 0_1$	...	$\mu 0_{m0}$	0	...	0	$x_{m0+1}(0)$	...	$x_n(0)$
$x_1(0) =$	$b0_{1,0}$	0	...	0	$b0_{1,1}$	...	$b0_{1,m0}$	$b0_{1,m0+1}$	...	$b0_{1,n}$
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{m0}(0) =$	$b0_{m0,0}$	0	...	0	$b0_{m0,1}$	...	$b0_{m0,m0}$	$b0_{m0,m0+1}$	...	$b0_{m0,n}$
$p_1(0) =$	$-a0_{0,1}$	$-a0_{1,1}$	...	$-a0_{m0,1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_{m0}(0) =$	$-a0_{0,m0}$	$-a0_{1,m0}$	...	$-a0_{m0,m0}$	0	...	0	0	...	0
$p_{m0+1}(0) =$	$-a0_{0,m0+1}$	$-a0_{1,m0+1}$	...	$-a0_{m0,m0+1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_n(0) =$	$-a0_{0,n}$	$-a0_{1,n}$	...	$-a0_{m0,n}$	0	...	0	0	...	0

В этой таблице аргументы $x_1(0)$, ..., $x_{m0}(0)$ перешли в состав функций, а на их место стали нули первых $m0$ строк таблицы. На место разрешающей стала обратная ей клетка **B** с элементами:

$b0_{1,1}$	...	$b0_{1,m0}$
...	...	...
$b0_{m0,1}$	...	$b0_{m0,m0}$

Остальные клетки разрешающей строки преобразовались по формулам:

$$b0_{j,0} = -\sum_{k=1}^{m0} b0_{j,k} \cdot a0_{k,0}; \quad b0_{j,l} = -\sum_{k=1}^{m0} b0_{j,k} \cdot a0_{k,l}; \quad (j = 1,...,m0; \quad l = m0+1,...,n). \quad (7.107)$$

Остальные клетки таблицы не претерпели изменений.

Выполним еще один групповой шаг жорданова исключения с разрешающей клеткой:

$-a0_{1,1}$	...	$-a0_{m0,1}$
...	...	...
$-a0_{1,m0}$	...	$-a0_{m0,m0}$

Она равна предыдущей разрешающей клетке, если ее транспонировать и поменять знак на противоположный. Преобразованная таблица после выполнения шага имеет вид:

	1	$p_1(0)$	...	$p_{m0}(0)$	0	...	0	$x_{m0+1}(0)$	...	$x_n(0)$
$x_1(0)=$	$b0_{1,0}$	0	...	0	$b0_{1,1}$	...	$b0_{1,m0}$	$b0_{1,m0+1}$	...	$b0_{1,n}$
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{m0}(0)=$	$b0_{m0,0}$	0	...	0	$b0_{m0,1}$	...	$b0_{m0,m0}$	$b0_{m0,m0+1}$	...	$b0_{m0,n}$
$\mu 0_1=$	$-b0_{0,1}$	$-b0_{1,1}$	...	$-b0_{m0,1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\mu 0_{m0}=$	$-b0_{0,m0}$	$-b0_{1,m0}$	...	$-b0_{m0,m0}$	0	...	0	0	...	0
$p_{m0+1}(0)=$	$-b0_{0,m0+1}$	$-b0_{1,m0+1}$	...	$-b0_{m0,m0+1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_n(0)=$	$-b0_{0,n}$	$-b0_{1,n}$	...	$-b0_{m0,n}$	0	...	0	0	...	0

В ней исключены из состава аргументов и переведены в состав функций множители Лагранжа $\mu 0_1$,..., $\mu 0_{m0}$, а на их место поставлены сопряженные переменные $p_1(0)$, ..., $p_{m0}(0)$.

Первые $m0$ строк этой таблицы не претерпели изменений. Остальные элементы новой таблицы вычисляются по формулам:

$$b0_{0,j}=\sum_{k=1}^{m0} a0_{0,k}\cdot b0_{k,j};\quad b0_{k,l}=-\sum_{j=1}^{m0} b0_{k,j}\cdot a0_{j,l};\quad (j,k=1,...,m0;\quad l=m0+1,...,n);\ (7.108)$$

$$b0_{0,l}=a0_{0,l}-\sum_{k=1}^{m0}\sum_{j=1}^{m0} a0_{0,k}\cdot b0_{k,j}\cdot a0_{j,l};\quad (l=m0+1,...,n).\qquad (7.109)$$

Эта таблица содержит в себе все ограничения, накладываемые на начальные условия. Она позволяет формировать начальные значения $x_1(0)$, ..., $x_n(0)$; $p_1(0)$, ..., $p_n(0)$, удовлетворяющие условиям трансверсальности, для интегрирования системы дифференциальных уравнений (7.96) и (7.97). При этом n этих значений: $p_1(0)$, ..., $p_{m0}(0)$; $x_{m0+1}(0)$, ..., $x_n(0)$ могут быть назначены произвольно, а остальные n значений: $x_1(0)$, ..., $x_{m0}(0)$; $p_{m0+1}(0)$, ..., $p_n(0)$ должны вычисляться по формулам:

$$x_j(0)=b0_{j,0}+\sum_{l=m0+1}^{n} b0_{j,l}\cdot x_l(0);\ p_l(0)=-b0_{0,l}-\sum_{j=1}^{m0} p_j(0)\cdot b0_{j,l};\ (j=1,...,m0;\ l=m0+1,...,n)\qquad (7.110)$$

.

Значения множителей Лагранжа $\mu 0_1$, ..., $\mu 0_{m0}$ можно вычислить по формуле:

$$\mu 0_k=-b0_{0,k}-\sum_{j=1}^{m0} p_j(0)\cdot b0_{j,k};\quad (k=1,...,m0).\qquad (7.111)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда для переменных состояния $x_1(0)$, ..., $x_{m0}(0)$ заданы фиксированные значения $x0_1$,..., $x0_{m0}$, а остальные переменные $x_{m0+1}(0)$, ..., $x_n(0)$ оставлены свободными. Таблица в этом случае имеет вид:

	1	$\mu 0_1$	...	$\mu 0_{m0}$	$x_1(0)$	...	$x_{m0}(0)$	$x_{m0+1}(0)$	...	$x_n(0)$
$0 =$	$-x0_1$	0	...	0	1	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$0 =$	$-x0_{m0}$	0	...	0	0	...	1	0	...	0
$p_1(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_1(0)}$	-1	...	0	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_{m0}(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_{m0}(0)}$	0	...	-1	0	...	0	0	...	0
$p_{m0+1}(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_{m0+1}(0)}$	0	...	0	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_n(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_n(0)}$	0	...	0	0	...	0	0	...	0

После выполнения двух групповых шагов жордановых исключений таблица будет выглядеть так:

	1	$p_1(0)$	...	$p_{m0}(0)$	0	...	0	$x_{m0+1}(0)$	...	$x_n(0)$
$x_1(0) =$	$x0_1$	0	...	0	1	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{m0}(0) =$	$x0_{m0}$	0	...	0	0	...	1	0	...	0
$\mu_1(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_1(0)}$	-1	...	0	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\mu_{m0}(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_{m0}(0)}$	0	...	-1	0	...	0	0	...	0
$p_{m0+1}(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_{m0+1}(0)}$	0	...	0	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_n(0) =$	$-\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_n(0)}$	0	...	0	0	...	0	0	...	0

Из таблицы видно, что для соблюдения условий трансверсальности переменные $p_1(0)$, ..., $p_{m0}(0)$; $x_{m0+1}(0)$, ..., $x_n(0)$ могут быть назначены произвольно, значения $x_1(0)$, ..., $x_{m0}(0)$ надо принять равными $x0_1$, ..., $x0_{m0}$, а значения $p_{m0+1}(0)$, ..., $p_n(0)$ определить по формуле:

$$p_l(0) = -\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_l(0)} \quad (l = m0+1,...,n). \tag{7.112}$$

Для линейного случая частные производные не зависят от принятых значений $x_1(0),..., x_n(0)$. Значения множителей Лагранжа $\mu 0_1,..., \mu 0_{m0}$ вычисляются по формуле:

$$\mu 0_k = -\frac{\partial \varphi 0_0}{\partial x_k(0)} - p_k(0) \quad (k = 1,...,m0). \tag{7.113}$$

Аналогичные выкладки можно сделать для формул (7.100) и (7.102), относящихся к конечной точке $s = S$. В линейном случае эти формулы будут иметь вид:

$$0 = aS_{j0} + \sum_{i=1}^{n} aS_{ji} \cdot x_i(S); \quad (j = 1,...,mS); \quad p_i(S) = \sum_{j=0}^{m0} \mu S_j \cdot aS_{ji}; \quad (i = 1,..., n). \tag{7.114}$$

Таблица, соответствующая этим формулам, такова:

	1	μS_1	...	μS_{mS}	$x_1(S)$	...	$x_{mS}(S)$	$x_{mS+1}(S)$	...	$x_n(S)$
$0 =$	$aS_{1,0}$	0	...	0	$aS_{1,1}$	...	$aS_{1,mS}$	$aS_{1,mS+1}$	...	$aS_{1,n}$
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$0 =$	$aS_{mS,0}$	0	...	0	$aS_{mS,1}$	...	$aS_{mS,mS}$	$aS_{mS,mS+1}$	...	$aS_{mS,n}$
$p_1(S) =$	$aS_{0,1}$	$aS_{1,1}$	...	$aS_{mS,1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_{mS}(S) =$	$aS_{0,mS}$	$aS_{1,mS}$	...	$aS_{mS,mS}$	0	...	0	0	...	0
$p_{mS+1}(S) =$	$aS_{0,mS+1}$	$aS_{1,mS+1}$	...	$aS_{mS,mS+1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_n(S) =$	$aS_{0,n}$	$aS_{1,n}$	...	$aS_{mS,n}$	0	...	0	0	...	0

Преобразованная таблица после выполнения двух групповых шагов жордановых исключений будет иметь вид:

	1	$p_1(S)$	...	$p_{mS}(S)$	0	...	0	$x_{mS+1}(S)$	...	$x_n(S)$
$x_1(S) =$	$bS_{1,0}$	0	...	0	$bS_{1,1}$	...	$bS_{1,mS}$	$bS_{1,mS+1}$	...	$bS_{1,n}$
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{mS}(S) =$	$bS_{mS,0}$	0	...	0	$bS_{mS,1}$	...	$bS_{mS,m0}$	$bS_{mS,mS+1}$	...	$bS_{mS,n}$
$\mu S_1 =$	$bS_{0,1}$	$bS_{1,1}$	...	$bS_{mS,1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\mu S_{mS} =$	$bS_{0,mS}$	$bS_{1,mS}$	...	$bS_{mS,mS}$	0	...	0	0	...	0
$p_{mS+1}(S) =$	$bS_{0,mS+1}$	$bS_{1,mS+1}$	...	$bS_{mS,mS+1}$	0	...	0	0	...	0
...=	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$p_n(S) =$	$bS_{0,n}$	$bS_{1,n}$	...	$bS_{mS,n}$	0	...	0	0	...	0

В этой таблице клетка с элементами $bS_{j,k}$ (j, k = 1, ..., mS) обратна клетке с элементами $aS_{j,k}$ (j, k = 1, ..., mS) из исходной таблицы. Остальные клетки вычисляются по формулам:

$$bS_{j,0} = -\sum_{k=1}^{mS} bS_{j,k} \cdot aS_{k,0}; \quad bS_{j,l} = -\sum_{k=1}^{mS} bS_{j,k} \cdot aS_{k,l} \quad (j = 1,..., mS; \quad l = mS+1,..., n); \tag{7.115}$$

$$bS_{0,j} = -\sum_{k=1}^{mS} aS_{0,k} \cdot bS_{k,j}; \quad bS_{k,l} = \sum_{j=1}^{mS} bS_{k,j} \cdot aS_{j,l} \quad (j,k = 1,..., mS; \quad l = mS+1,..., n); \tag{7.116}$$

$$bS_{0,l} = aS_{0,l} - \sum_{k=1}^{mS}\sum_{j=1}^{mS} aS_{0,k} \cdot bS_{k,j} \cdot aS_{j,l} \quad (l = mS+1,..., n). \tag{7.117}$$

Полученные зависимости позволяют проверять конечные значения $x_1(S)$, ..., $x_n(S)$; $p_1(S)$, ..., $p_n(S)$, на удовлетворение условиям трансверсальности. При этом n этих значений: $p_1(S)$, ..., $p_{mS}(S)$; $x_{mS+1}(S)$, ..., $x_n(S)$ могут быть произвольными, а остальные n значений: $x_1(S)$, ..., $x_{mS}(S)$; $p_{mS+1}(S)$, ..., $p_n(S)$ должны соответствовать формулам:

$$x_j(S) = bS_{j,0} + \sum_{l=mS+1}^{n} bS_{j,l} \cdot x_l(S); \; p_l(S) = bS_{0,l} + \sum_{j=1}^{mS} p_j(S) \cdot bS_{j,l} \; (j = 1,..., mS; l = mS+1,..., n) \tag{7.118}$$

.

Значения множителей Лагранжа μS_1, ..., μS_{mS} в этом случае можно вычислить по формуле:

$$\mu S_k = bS_{0,k} + \sum_{j=1}^{mS} p_j(S) \cdot bS_{j,k} \quad (k = 1,..., mS). \tag{7.119}$$

В частном случае, когда для переменных состояния $x_1(S)$, ..., $x_{mS}(S)$ заданы фиксированные значения xS_1,..., xS_{mS}, а остальные переменные $x_{mS+1}(S)$, ..., $x_n(S)$ оставлены свободными, переменные $p_1(S)$, ..., $p_{m0}(S)$; $x_{m0+1}(S)$, ..., $x_n(S)$ могут быть произвольными, а значения $p_{m0+1}(S)$, ..., $p_n(S)$ нужно вычислять по формуле:

$$p_l(S) = \frac{\partial \varphi S_0}{\partial x_l(S)} \quad (l = mS+1,..., n). \tag{7.120}$$

Значения множителей Лагранжа μS_1,..., μS_{mS} вычисляются по формуле:

$$\mu S_k = -\frac{\partial \varphi S_0}{\partial x_k(S)} + p_k(S) \quad (k = 1,..., mS). \tag{7.121}$$

7.16. Принцип максимума Понтрягина для бикватерниона перемещений

С целью освоения кватернионного подхода к принципу максимума Понтрягина [33] построим еще одну систему разрешающих уравнений. Будем трактовать поставленную задачу как задачу оптимального управления. Переменными состояния в этой задаче будем считать компоненты бикватерниона перемещений $\mathbf{Y_0M}$, выраженные в подвижной системе координат, связанной с сечением в исходном состоянии. Они

являются функциями дуговой координаты s и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (7.45):

$$ {}_{Y0}\mathbf{M}' = {}_{Y0}\mathbf{M} \circ \frac{{}_{Y0}\mathbf{\Omega 0} + {}_{Y}\mathbf{K}}{2} - \frac{{}_{Y0}\mathbf{\Omega 0}}{2} \circ {}_{Y0}\mathbf{M} , \tag{7.122} $$

где сохранены обозначения, принятые в предыдущих разделах. Здесь и в дальнейшем для краткости письма будем опускать символы (s), обозначающие зависимость переменных от дуговой координаты. Представим бикватернионы ${}_{Y0}\mathbf{M}$ и ${}_{Y}\mathbf{K}$ через составляющие их кватернионы:

$$ {}_{Y0}\mathbf{M} = {}_{Y0}\boldsymbol{\mu} + \varpi \cdot {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ}; \quad {}_{Y}\mathbf{K} = {}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + \varpi \cdot {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} . \tag{7.123} $$

Запишем систему уравнений (7.122) покватернионно, поскольку в дальнейшем будет более удобно работать с отдельными кватернионами:

$$ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}' = \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}}{2} + \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}}{2} ; \tag{7.124} $$

$$ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ\prime} = \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}}{2} + \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ}}{2} + \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}}{2} . \tag{7.125} $$

Требуется найти чисто векторный управляющий кватернион ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}(s)$ ($0 \le s \le S$), при использовании которого удовлетворяются краевые условия для кватернионных функций ${}_{Y0}\boldsymbol{\mu}$ и ${}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ}$, и потенциальная энергия отрезка проволоки длиной S:

$$ \Pi = D \cdot \int_0^S \frac{{}_{Y}\kappa_1^2 + {}_{Y}\kappa_2^2 + {}_{Y}\kappa_3^2}{2} \cdot ds = D \cdot \int_0^S \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{Y}\overline{\boldsymbol{\kappa}} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}}{2} \right) \cdot ds \tag{7.126} $$

принимает минимальное значение. Полагаем, что приведенная выше формула для определения потенциальной энергии упругой проволоки при одинаковых ее жесткостях на изгиб и кручение, равных D, возражений не вызывает. Что касается кватерниона ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ}$, то он равен нулю, поскольку проволока нерастяжима и не испытывает деформаций от поперечных усилий. В последующих формулах мы иногда будем оставлять обозначение кватерниона ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ}$ для сохранения цельности формулы.

Введем в рассмотрение сопряженные кватернионы: ${}_{Y0}\mathbf{p}^{\circ}$ – сопряженный с кватернионом ${}_{Y0}\boldsymbol{\mu}$, ${}_{Y0}\mathbf{p}$ – сопряженный с кватернионом ${}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ}$, и запишем выражение для функции Гамильтона, как предписано формулой (7.91):

$$ \begin{aligned} H = -D \cdot \operatorname{scal} \frac{{}_{Y}\overline{\boldsymbol{\kappa}} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}}{2} + \operatorname{scal}\left({}_{Y0}\overline{\mathbf{p}}^{\circ} \circ \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}}{2} \right) + \\ + \operatorname{scal}\left({}_{Y0}\overline{\mathbf{p}} \circ \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} + {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^{\circ} + {}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}}{2} \right) . \end{aligned} \tag{7.127} $$

Следует обратить внимание на примененный здесь прием представления скалярной функции кватернионного аргумента. Гамильтониан состоит из попарных произведений компонентов кватернионов, примерно таких:

$$\kappa\kappa = {}_{\mathbf{Y}}\kappa_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\kappa_1 + {}_{\mathbf{Y}}\kappa_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\kappa_2 + {}_{\mathbf{Y}}\kappa_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\kappa_3; \quad pf = p_0 \cdot f_0 + p_1 \cdot f_1 + p_2 \cdot f_2 + p_3 \cdot f_3. \qquad (7.128)$$

Нетрудно видеть, что для этой цели можно использовать кватернионные выражения:

$$\kappa\kappa = \mathrm{scal}({}_{\mathbf{Y}}\overline{\boldsymbol{\kappa}} \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}); \quad pf = \mathrm{scal}(\overline{\mathbf{p}} \circ \mathbf{f}). \qquad (7.129)$$

Первое из этих равенств имеет укороченный вид, поскольку кватернион кривизн чисто векторный (${}_{\mathbf{Y}}\kappa_0 = 0$). При этом справедливыми остаются свойства скалярной части кватернионного произведения (2.21) и (2.22). Анализируя размерности величин, замечаем, что гамильтониан H и кватернион ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}$ – имеют размерность силы, кватернион ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ$ – размерность момента.

Пользуясь функцией Гамильтона, запишем дифференциальные уравнения для сопряженных кватернионов:

$${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}' = -\frac{\partial H}{\partial\, {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^\circ} = -\frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathbf{Y}}\overline{\boldsymbol{\kappa}}}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}} - {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}}{2}; \qquad (7.130)$$

$${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ\prime} = -\frac{\partial H}{\partial\, {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}} = -\frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ \circ {}_{\mathbf{Y}}\overline{\boldsymbol{\kappa}}}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ \circ {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}} - {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}^\circ - {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}^\circ \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ}{2}. \qquad (7.131)$$

При дифференцировании была использована формула (2.113) и тот факт, что скалярная часть произведения кватернионов не меняется при циклической перестановке сомножителей. Поскольку кватернионы ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}$, ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}^\circ$, ${}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}$ и ${}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^\circ$ чисто векторные, можем записать:

$${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}' = \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}}{2} + \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} - {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}}{2}; \qquad (7.132)$$

$${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ\prime} = \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}}{2} + \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} - {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ}{2} + \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^\circ - {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^\circ \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ}{2}. \qquad (7.133)$$

Нетрудно заметить, что эта система из двух кватернионных уравнений эквивалентна одному бикватернионному уравнению:

$${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}' = {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P} \circ \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{0} + {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{K}}{2} - \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{0}}{2} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}; \qquad (7.134)$$

если обозначить:

$${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P} = {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} + \varpi \cdot {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ. \qquad (7.135)$$

Таким образом, получена система из четырех кватернионных дифференциальных уравнений (7.124), (7.125), (7.132), (7.133) относительно неизвестных ${}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}$, ${}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^\circ$, ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}$, ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^\circ$. В этих уравнениях неопределенным остается кватернион дополнительных кривизн ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}$. В зависимости от того, какая формула будет использована для его определения, будем получать различные системы разрешающих уравнений.

В соответствии с процедурой принципа максимума Понтрягина найдем значение главного кватерниона деформаций ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}$ из условия максимума гамильтониана H.

Поскольку никакие ограничения на этот кватернион не накладываются, в качестве условий максимума принимаем необходимое условие – стационарность гамильтониана:

$$\frac{\partial H}{\partial {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}} = -D\cdot {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa} + \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\mu}}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ} + {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\mu}}^{\circ}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}}{2} = \mathbf{o} \tag{7.136}$$

и достаточное условие – отрицательная определенность матрицы Гессе:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\kappa_i\cdot\partial\kappa_j} = -D\cdot\delta_{i,j} \quad i,j = 1,2,3\,. \tag{7.137}$$

Здесь $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Поскольку жесткость D – величина положительная, а перед нею стоит минус, условия максимума выполняются.

Поэтому находим значения кривизн ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}$ из равенства (7.136):

$${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa} = \frac{{}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\mu}}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ} + {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\mu}}^{\circ}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}}{2\cdot D}\,. \tag{7.138}$$

Заметим, что бикватернион $\mathbf{M}$ является нормированным, как любой бикватернион преобразования координат. Поэтому вместо формулы (7.138) можно применять эквивалентную ей формулу:

$${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa} = {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{-1}\circ\frac{{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ} - {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{\circ}\circ_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{-1}\circ{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}}{2\cdot D}\,. \tag{7.139}$$

Основанием для написания этой формулы являются следующие равенства:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} + \varpi\cdot\boldsymbol{\mu}^{\circ};\quad \overline{\mathbf{M}} = \overline{\boldsymbol{\mu}} + \varpi\cdot\overline{\boldsymbol{\mu}}^{\circ};\quad \mathbf{M}^{-1} = \boldsymbol{\mu}^{-1} + \varpi\cdot\boldsymbol{\mu}^{-1}\circ\boldsymbol{\mu}^{\circ}\circ\boldsymbol{\mu}^{-1} \tag{7.140}$$

и тот факт, что бикватернион, обратный нормированному, равен сопряженному.

Таким образом, формулы (7.138) и (7.139) служат основой для получения двух систем дифференциальных уравнений. По этому пути можно пойти дальше, приняв во внимание, что рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет бикватернионный первый интеграл:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{C} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}\circ{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}\circ{}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1}\circ{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1}\,. \tag{7.141}$$

Это означает, что по формуле (7.141) на базе кватернионов $\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$, каждый из которых является функцией дуговой координаты s, получается бикватернион $\mathbf{C}$, от дуговой координаты не зависящий. В этом можно убедиться, вычисляя производную по s от правой части формулы (7.141):

$$\begin{aligned}({}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1}\circ_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1})' = {}&{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}'\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1}\circ_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1} + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}'\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1}\circ_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1} -\\ -{}&{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}'\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1}\circ_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}\circ_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1}\circ_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1}\circ_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}'\circ_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1}.\end{aligned} \tag{7.142}$$

Подставляя сюда выражения для производных из формул (7.72), (7.122), (7.134), после преобразований придем к выводу о том, что

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{C}' = ({}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1})' = \mathbf{O}\,. \tag{7.143} $$

Таким образом, бикватернион $\mathbf{C}$ и все его компоненты являются константами.

Первый интеграл (7.141) позволяет исключить из системы дифференциальных уравнений компоненты одного из неизвестных бикватернионов, в частности, ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}$. Из (7.141) следует:

$$ \begin{gathered} {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P} = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{C} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}; \quad {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}; \\ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ ({}_{\mathbf{X}}\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{\circ} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}). \end{gathered} \tag{7.144} $$

Подставив этот результат в формулу (7.139), получим:

$$ \begin{gathered} {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa} = {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{\circ} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}}{2 \cdot D} - \\ - \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\mu}}{2 \cdot D}. \end{gathered} \tag{7.145} $$

Уравнения (7.124), (7.125) совместно с формулой (7.145) для вычисления ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}$ составляют полную систему дифференциальных уравнений для определения компонентов бикватерниона ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}$, представленных в системе координат $\mathbf{Y0}$, связанной с сечением проволоки в исходном состоянии.

Рассмотрим далее случай, когда исключается из рассмотрения бикватернион ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}$. Из формулы (7.141) следует:

$$ \begin{gathered} {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\mathbf{M}} = {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1} = {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{C} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}; \quad {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\mu}} = {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}; \\ {}_{\mathbf{Y0}}\overline{\boldsymbol{\mu}}^{\circ} = {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{-1} \circ ({}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} - \\ - {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}). \end{gathered} \tag{7.146} $$

Здесь использовано свойство нормированного бикватерниона, состоящее в том, что кватернион, обратный нормированному, равен сопряженному с ним бикватерниону.

С использованием формул (7.138) и (7.146) можем выразить кватернион кривизн через компоненты бикватерниона ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}$:

$$ \begin{gathered} {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa} = {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p} + {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}}{2 \cdot D} - \\ - \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{p}}{2 \cdot D}. \end{gathered} \tag{7.147} $$

Уравнения (7.132) и (7.133) совместно с формулой (7.147) составляют полную систему дифференциальных уравнений для определения компонентов бикватерниона ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}$, представленных в системе координат, связанной с сечением проволоки в исходном состоянии.

В результате решения систем дифференциальных уравнений будут получены две бикватернионные функции ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}$ и ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}$. С помощью функции ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}$ можно вычислить важную функцию ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}$, определяющую деформированное состояние проволоки:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda 0} \circ_{\mathbf{Y0}} \mathbf{M} . \tag{7.148} $$

Эта функция будет получена в неподвижной системе координат. С ее помощью бикватернион истинных эйлеровых перемещений определяется формулой:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi} = 2 \cdot \mathrm{Ln}\, {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda} . \tag{7.149} $$

Ось проволоки в неподвижной системе координат определяется радиусом-вектором ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$ через кватернионные компоненты бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}$:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r} = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} . \tag{7.150} $$

Силовая часть задачи решается следующим образом. В разделе 7.9 показано, что внутренние усилия в сечениях проволоки, представленные в неподвижной системе координат ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}$, не зависят от дуговой координаты и являются константами. Есть основания предположить, что они связаны с константами задачи (7.141) следующей формулой:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \cdot {}_{\mathbf{X}}\mathbf{C} . \tag{7.151} $$

Для перехода к местной системе координат надо воспользоваться формулой (7.60). В результате получим:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{C} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{2} \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda 0} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda 0}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda} . \tag{7.152} $$

Подставляя сюда выражение для ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}$ из формулы (7.148), получим:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \cdot {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{M}^{-1} \circ {}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P} . \tag{7.153} $$

В правильности полученных результатов убеждаемся, пользуясь формулами (7.69), (7.153) и (7.138). Таким образом, силовой винт системы определяется формулой (7.151), а внутренние усилия в проволоке в местной системе координат – формулой (7.153).

7.17. Принцип максимума Понтрягина для собственного бикватерниона

Для определения формы проволоки в деформированном состоянии удобно пользоваться собственным бикватернионом $\boldsymbol{\Lambda}$, представленным в неподвижной системе координат $\mathbf{X}$. В предыдущем разделе этот бикватернион мы были вынуждены вычислять через бикватернионы $\mathbf{M}$ и $\boldsymbol{\Lambda 0}$ по формуле (7.148). Попытаемся составить систему дифференциальных уравнений, в которой в качестве основного неизвестного используется искомый бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}$. Принцип максимума Понтрягина позволяет это сделать без особых затруднений.

Итак, переменными состояния в решаемой задаче будем считать компоненты бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$, являющиеся функциями дуговой координаты s и удовлетворяющие бикватернионному дифференциальному уравнению (7.47):

$$ {}_{X}\mathbf{\Lambda}' = {}_{X}\mathbf{\Lambda} \circ \frac{{}_{Y}\mathbf{K} + {}_{Y0}\mathbf{\Omega 0}}{2}. \tag{7.154} $$

Если расписать это уравнение покватернионно, имея в виду, что

$$ {}_{X}\mathbf{\Lambda} = {}_{X}\boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}; \quad {}_{Y}\mathbf{K} = {}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + \varpi \cdot {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ}; \quad {}_{Y0}\mathbf{\Omega 0} = {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} + \varpi \cdot {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ}, \tag{7.155} $$

получим систему из двух кватернионных дифференциальных уравнений:

$$ {}_{X}\boldsymbol{\lambda}' = {}_{X}\boldsymbol{\lambda} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}}{2}; \tag{7.156} $$

$$ {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ\prime} = {}_{X}\boldsymbol{\lambda} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ}}{2} + {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}}{2}. \tag{7.157} $$

Соблюдая эти уравнения, требуется найти чисто векторный управляющий кватернион ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}$, такой что удовлетворяются краевые условия для кватернионных функций ${}_{X}\boldsymbol{\lambda}$ и ${}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$, а потенциальная энергия отрезка проволоки длиной S:

$$ \Pi = D \cdot \int_{0}^{S} \frac{{}_{Y}\kappa_1^2 + {}_{Y}\kappa_2^2 + {}_{Y}\kappa_3^2}{2} \cdot ds = D \cdot \int_{0}^{S} \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{Y}\overline{\boldsymbol{\kappa}} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}}{2} \right) \cdot ds \tag{7.158} $$

принимает минимальное значение.

Введем в рассмотрение кватернионы: ${}_{X}\mathbf{q}^{\circ}$ – сопряженный с кватернионом ${}_{X}\boldsymbol{\lambda}$, ${}_{X}\mathbf{q}$ – сопряженный с кватернионом ${}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$, и запишем выражение для функции Гамильтона:

$$ \begin{aligned} H = &- D \cdot \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{Y}\overline{\boldsymbol{\kappa}} \circ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}}{2} \right) + \operatorname{scal}\left({}_{X}\overline{\mathbf{q}}^{\circ} \circ {}_{X}\boldsymbol{\lambda} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}}{2} \right) + \\ &+ \operatorname{scal}\left({}_{X}\overline{\mathbf{q}} \circ {}_{X}\boldsymbol{\lambda} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ}}{2} + {}_{X}\overline{\mathbf{q}} \circ {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}}{2} \right). \end{aligned} \tag{7.159} $$

Пользуясь функцией Гамильтона, запишем дифференциальные уравнения для сопряженных кватернионов:

$$ {}_{X}\mathbf{q}' = -\frac{\partial H}{\partial\, {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}} = - {}_{X}\mathbf{q} \circ \frac{{}_{Y}\overline{\boldsymbol{\kappa}} + {}_{Y0}\overline{\boldsymbol{\omega 0}}}{2}; \tag{7.160} $$

$$ {}_{X}\mathbf{q}^{\circ\prime} = -\frac{\partial H}{\partial\, {}_{X}\boldsymbol{\lambda}} = -\left({}_{X}\mathbf{q}^{\circ} \circ \frac{{}_{Y}\overline{\boldsymbol{\kappa}} + {}_{Y0}\overline{\boldsymbol{\omega 0}}}{2} + {}_{X}\mathbf{q} \circ \frac{{}_{Y}\overline{\boldsymbol{\kappa}}^{\circ} + {}_{Y0}\overline{\boldsymbol{\omega 0}}^{\circ}}{2} \right). \tag{7.161} $$

Поскольку кватернионы ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}$, ${}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}$, ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}$ и ${}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}$ являются чисто векторными, операция их сопряжения эквивалентна перемене знака кватерниона на обратный. С учетом этого уравнения (7.160) и (7.161) можно переписать так:

$$ {}_{X}\mathbf{q}' = {}_{X}\mathbf{q} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}}{2}; \tag{7.162} $$

$$ {}_{X}\mathbf{q}^{\circ\prime} = {}_{X}\mathbf{q} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa}^{\circ} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}}{2} + {}_{X}\mathbf{q}^{\circ} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}. \tag{7.163} $$

Можно заметить, что эта система из двух кватернионных уравнений эквивалентна одному бикватернионному уравнению:

$$ {}_{X}\mathbf{Q}' = {}_{X}\mathbf{Q} \circ \frac{{}_{Y}\mathbf{K} + {}_{Y0}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{0}}{2}, \tag{7.164} $$

если обозначить:

$$ {}_{X}\mathbf{Q} = {}_{X}\mathbf{q} + \varpi \cdot {}_{X}\mathbf{q}^{\circ}. \tag{7.165} $$

Запишем теперь сводную систему из четырех дифференциальных уравнений:

$$ {}_{X}\boldsymbol{\lambda}' = {}_{X}\boldsymbol{\lambda} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}; \quad {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ\prime} = {}_{X}\boldsymbol{\lambda} \circ \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}}{2} + {}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}; \tag{7.166} $$

$$ {}_{X}\mathbf{q}' = {}_{X}\mathbf{q} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}; \quad {}_{X}\mathbf{q}^{\circ\prime} = {}_{X}\mathbf{q} \circ \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}}{2} + {}_{X}\mathbf{q}^{\circ} \circ \frac{{}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + {}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}. \tag{7.167} $$

В этой системе пока остается неопределенным лишь кватернион кривизн ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}$. Найдем его из условия максимума гамильтониана H. В качестве условий максимума принимаем необходимое условие – его стационарность при изменениях компонентов ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}$:

$$ \frac{\partial H}{\partial {}_{Y}\boldsymbol{\kappa}} = -D \cdot {}_{Y}\boldsymbol{\kappa} + \frac{{}_{X}\overline{\boldsymbol{\lambda}} \circ {}_{X}\mathbf{q}^{\circ} + {}_{X}\overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ} \circ {}_{X}\mathbf{q}}{2} = 0 \tag{7.168} $$

и достаточное условие – отрицательная определенность матрицы Гессе:

$$ \frac{\partial^2 H}{\partial {}_{Y}\kappa_i \cdot \partial {}_{Y}\kappa_j} = -D \cdot \delta_{i,j} \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{7.169} $$

Здесь $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Поскольку жесткость D – величина положительная, а перед нею стоит минус, условия максимума выполняются.

Поэтому находим значения кривизн ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}$ из равенства (7.168):

$$ {}_{Y}\boldsymbol{\kappa} = \frac{{}_{X}\overline{\boldsymbol{\lambda}} \circ {}_{X}\mathbf{q}^{\circ} + {}_{X}\overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ} \circ {}_{X}\mathbf{q}}{2 \cdot D}. \tag{7.170} $$

Система (7.166), (7.167) приобретет окончательный вид, если в нее подставить выражения для ${}_{Y}\boldsymbol{\kappa}$ из формулы (7.170).

Нетрудно проверить, что система бикватернионных дифференциальных уравнений (7.154), (7.164) имеет первый интеграл, выражаемый формулой:

$$ {}_{X}\mathbf{C} = {}_{X}\mathbf{Q} \circ {}_{X}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \tag{7.171} $$

где ${}_{X}\mathbf{C}$ – произвольный постоянный бикватернион.

Проверка показывает:

$$(_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}\circ_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1})' = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}'\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1} - {}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}\circ({}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}'\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot{}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}\circ({}_{\mathrm{Y}}\mathbf{K} + {}_{\mathrm{Y0}}\mathbf{\Omega 0})\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1} - \frac{1}{2}\cdot{}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}\circ({}_{\mathrm{Y}}\mathbf{K} + {}_{\mathrm{Y0}}\mathbf{\Omega 0})\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{O}; \tag{7.172}$$

а, значит, ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{C}$ – константа.

Бикватернион ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}$ представляет собой обобщенное усилие, соответствующее обобщенному перемещению ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}$. При помощи него можно вычислить бикватернион внутренних усилий $\mathbf{U}$ в неподвижной системе координат $\mathbf{X}$:

$${}_{\mathrm{X}}\mathbf{U} = \frac{1}{2}\cdot{}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{7.173}$$

и в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(s)$, связанной с сечением s:

$${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{U} = \frac{1}{2}\cdot{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}\,. \tag{7.174}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что усилия ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{U}$ в неподвижной системе координат и усилия ${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{U}$ в подвижной системе координат, вычисленные по формуле (7.174), связаны зависимостью (7.60). Кроме этого, моментная часть внутренних усилий:

$${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{u}^{\circ} = \frac{{}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{\circ} + {}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}}{2} \tag{7.175}$$

удовлетворяет физическому уравнению (7.69). Это доказывает справедливость формулы (7.174). Бикватернион-константа ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{C}$ оказался равным удвоенному бикватерниону усилий, представленному в неподвижной системе координат ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{U}$, независимость которого от дуговой координаты доказана в разделе 7.9.

Первый интеграл (7.171) позволяет исключить из системы уравнений один из бикватернионов, либо ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}$, либо ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}$. Если равенство (7.171) разрешить относительно ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}$:

$${}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{C}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda};\quad {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda};\quad {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{\circ} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} + {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\,, \tag{7.176}$$

то кватернион кривизн ${}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}$ можно будет выразить формулой:

$${}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa} = \frac{{}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} + {}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} + {}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}}{2\cdot D}\,. \tag{7.177}$$

Подставив это выражение в уравнения (7.166), получим систему из двух кватернионных дифференциальных уравнений относительно переменных ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}$ и ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$.

Теперь представим равенство (7.171) таким образом:

$${}_{\mathrm{X}}\overline{\mathbf{\Lambda}} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{C};\quad {}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c};\quad {}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{-1}\circ({}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ} - {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c})\,. \tag{7.178}$$

В этом случае кватернион кривизн ${}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}$ выражается формулой:

$$ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{-1} \circ \frac{{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{\circ} + {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q} - {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{\circ} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}}{2 \cdot D}. \tag{7.179} $$

Учитывая то, что бикватернион ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}$ является нормированным, выражение (7.177) можно представить и в форме (7.179):

$$ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ \frac{{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} + {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} - {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}}{2 \cdot D}. \tag{7.180} $$

Тогда вид разрешающих уравнений для переменных ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}$, ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$и переменных ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}$, ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{q}^{\circ}$ будет совершенно идентичным.

Следует отметить, что основные неизвестные ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}$ и ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{Q}$ приводят к несложным и однотипным зависимостям. Форма проволоки в этом случае определяется непосредственно бикватернионной функцией ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}$. Бикватернион истинных эйлеровых перемещений определяется формулой:

$$ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Psi}(s) = 2 \cdot \mathrm{Ln}\left[{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}(s) \right]. \tag{7.181} $$

Координаты оси проволоки можно вычислить, как и в предыдущем разделе, пользуясь формулой (7.150). Силовой винт системы определяется формулой (7.173). Внутренние усилия в проволоке, представленные в местной системе координат, можно вычислить по формуле (7.174).

7.18. Принцип максимума Понтрягина для других кватернионов

Бикватернионная функция $\boldsymbol{\Lambda}(s)$ хорошо описывает форму изогнутой проволоки и удобна для математических преобразований. Однако, для зрительного восприятия результатов расчетов лучше работать с переменными, которые описывают ось проволоки. Роль такой переменной с успехом выполняет кватернион $\mathbf{r}(s)$, содержащий координаты центра сечения с дуговой координатой s. Ориентацию этого сечения в пространстве определяет кватернион $\boldsymbol{\lambda}(s)$. Составить соответствующую систему дифференциальных уравнений поможет принцип максимума Понтрягина. Геометрические уравнения для этого набора переменных получены в разделе 7.7:

$$ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}' = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ \frac{{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa} + {}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega 0}}{2}; \tag{7.182} $$

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}' = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega 0}^{\circ} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}. \tag{7.183} $$

Здесь и далее будем опускать символ (s), обозначающий функциональную зависимость от дуговой координаты. В соответствии с принципом максимума Понтрягина при соблюдении этих уравнений требуется найти чисто векторный управляющий кватернион ${}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}$, такой что удовлетворяются краевые условия для кватернионных функций ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}$ и ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}$, а потенциальная энергия отрезка проволоки длиной S:

$$ \Pi = D \cdot \int_0^S \frac{{}_{\mathrm{Y}}\kappa_1^2 + {}_{\mathrm{Y}}\kappa_2^2 + {}_{\mathrm{Y}}\kappa_3^2}{2} \cdot ds = D \cdot \int_0^S \mathrm{scal}\left(\frac{{}_{\mathrm{Y}}\overline{\boldsymbol{\kappa}} \circ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}}{2} \right) \cdot ds \tag{7.184} $$

принимает минимальное значение.

Введем в рассмотрение сопряженные кватернионы: кватернионы: ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}$ – сопряженный с кватернионом ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}$, ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}$ – сопряженный с кватернионом ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}$, и построим с их помощью выражение для функции Гамильтона:

$$H=-D\cdot\operatorname{scal}\left(\frac{{}_{\mathrm{Y}}\overline{\boldsymbol{\kappa}}\circ{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}}{2}\right)+\operatorname{scal}\left({}_{\mathrm{X}}\overline{\mathbf{m}}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ\frac{{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}+{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}\right)+\operatorname{scal}\left({}_{\mathrm{X}}\overline{\mathbf{p}}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\right). \quad (7.185)$$

Пользуясь функцией Гамильтона и формулами дифференцирования скалярных функций кватерниона (2.113) и (2.116), запишем дифференциальные уравнения для сопряженных кватернионов:

$${}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}'=-\frac{\partial H}{\partial\,{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}}={}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}\circ\frac{{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}+{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}+({}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}-{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p})\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\,; \quad (7.186)$$

$${}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}'=-\frac{\partial H}{\partial\,{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}}=\mathbf{o}\,. \quad (7.187)$$

При выводе этих зависимостей были использованы свойства нормированных и чисто векторных кватернионов, участвующих в преобразованиях: обращение нормированного кватерниона эквивалентно его сопряжению, сопряжение чисто векторного кватерниона эквивалентно перемене его знака на противоположный.

Значение кватерниона кривизн найдем из условия стационарности гамильтониана:

$${}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}=\frac{{}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}}{2\cdot D}\,. \quad (7.188)$$

Подставляя это значение в дифференциальные уравнения (7.182) и (7.186), придем к системе дифференциальных уравнений (7.182), (7.183), (7.186), (7.187) для определения четырех неизвестных кватернионных функций ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}$, ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}$, ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}$ и ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}$.

Можно проверить, что система дифференциальных уравнений (7.182), (7.183), (7.186), (7.187) имеет два кватернионных первых интеграла:

$${}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}={}_{\mathrm{X}}\mathbf{p};\quad {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ}={}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}+{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}-{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}\,. \quad (7.189)$$

Истинность первого равенства очевидна. В силу (7.187) компоненты кватерниона ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}$ – константы. Для проверки истинности второго равенства продифференцируем ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ}$ и покажем, что производная этой величины по переменной s равна нулевому кватерниону:

$$\begin{aligned}{}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ\prime}&={}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}'\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}+{}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}'\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}+{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}'\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}+{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}'-{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}'\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}-{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}'=\\&={}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}\circ\frac{{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}+{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}+{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}-{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}+\\&+{}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ\frac{{}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa}+{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}+{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\circ{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}-{}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{\mathrm{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}=\mathbf{o}.\end{aligned} \quad (7.190)$$

Таким образом, равенства (7.189) действительно являются первыми интегралами. Первые интегралы позволяют понизить порядок системы дифференциальных уравнений. Из равенств (7.189) можно вычислить ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}$:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{m} = ({}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ} - {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} + {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}) \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} \,. \tag{7.191} $$

Подставив это значение в формулу (7.188), получим

$$ {}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{\kappa} = \frac{{}_{\mathrm{X}}\overline{\boldsymbol{\lambda}} \circ ({}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ} - {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} + {}_{\mathrm{X}}\mathbf{c} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}) \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}}{2 \cdot D}, \tag{7.192} $$

выраженное только через переменные ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}$ и ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}$ и произвольные постоянные ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}$ и ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{c}^{\circ}$, что дает возможность решать систему, состоящую только из двух дифференциальных уравнений (7.182) и (7.183).

Далее рассмотрим формулы для определения внутренних усилий в деформированной проволоке. Эти формулы таковы:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{u} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}; \quad {}_{\mathrm{X}}\mathbf{u}^{\circ} = \frac{{}_{\mathrm{X}}\mathbf{m} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}}{2} + \frac{{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} - {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}}{2}; \tag{7.193} $$

$$ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{u} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}; \quad {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{u}^{\circ} = \frac{{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}}{2}. \tag{7.194} $$

Для проверки их правильности полезно выписать в принятых здесь переменных собственный бикватернион ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}$ и бикватернионы усилий в общей ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{U}$ и местной ${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{U}$ системах координат:

$$ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \frac{{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}}{2}; \quad {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} - \boldsymbol{\varpi} \cdot \frac{{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}}{2}; \tag{7.195} $$

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{U} = {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \left(\frac{{}_{\mathrm{X}}\mathbf{m} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}}{2} + \frac{{}_{\mathrm{X}}\mathbf{r} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} - {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}}{2} \right); \quad {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{U} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{p} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varpi} \cdot \frac{{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{m}}{2}. \tag{7.196} $$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что усилия в проволоке преобразуются по формуле:

$$ {}_{\mathrm{X}}\mathbf{U} = {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda} \circ {}_{\mathrm{Y}}\mathbf{U} \circ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \tag{7.197} $$

а моментная группа усилий в местной системе координат ${}_{\mathrm{Y}}\mathbf{u}^{\circ}$ корреспондируется с формулой (7.188). Это свидетельствует о правильности формул (7.193) и (7.194).

В плане истолкования результатов расчета эта система переменных является достаточно удобной. Центр сечения с дуговой координатой s в общей системе координат определяется радиусом-вектором ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}(s)$, а его ориентация в пространстве собственным кватернионом ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$. Вместо ${}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$ можно использовать

$$ {}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\psi}(s) = 2 \cdot \mathrm{Ln}\left[{}_{\mathrm{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) \right]. \tag{7.198} $$

Это чисто векторный безразмерный кватернион, вектор которого определяет направление оси, вокруг которой надо повернуть неподвижную систему координат, чтобы она получила ориентацию системы координат рассматриваемого сечения. Угол, на который надо повернуть неподвижную систему, равен длине этого вектора. Иными словами, ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\psi}(s)$ – вектор истинного эйлерова поворота.

Усилия в системе координат, связанной с сечением, даются формулами (7.194), причем кватернион ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{u}(s)$ представляет поперечные силы и продольную силу, кватернион ${}_{\mathbf{Y}}\mathbf{u}^{\circ}(s)$ – изгибающие моменты и крутящий момент. Оба кватерниона – чисто векторные.

Силовой винт системы ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{U}$ связан с основными переменными формулами (7.193).

7.19. Обычные краевые условия

В предыдущих разделах был осуществлен практикум по составлению дифференциальных уравнений, описывающих поведение отрезка упругой проволоки, нагруженной только на концах. В качестве основных неизвестных выступали два типа бикватернионов: геометрические и силовые. Из геометрических неизвестных опробованы: собственный бикватернион перемещений ${}_{\mathbf{Y}0}\mathbf{M}$, собственный бикватернион деформированного состояния ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}$ и пара кватернионов: ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}$ – кватернион ориентации и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$ – кватернион радиуса-вектора центра сечения. Выбор геометрических неизвестных предопределял выбор силовых. Силовые неизвестные, благодаря применению принципа максимума Понтрягина, всегда получались сопряженными с геометрическими.

Бикватернион общего вида информационно эквивалентен восьми вещественным переменным, а кватернион – четырем. В этой же задаче фигурируют лишь частные виды бикватернионов и кватернионов. либо чисто винтовые (векторные), либо нормированные. Такие бикватернионы эквивалентны шести вещественным переменным, а кватернионы – трем. Поэтому набор произвольных постоянных в общем решении системы дифференциальных уравнений эквивалентен двенадцати вещественным переменным, что соответствует физическому смыслу задачи. Такое число краевых условий требуется задать, чтобы однозначно определить положение отрезка проволоки в трехмерном пространстве.

Классической является задача расчета отрезка проволоки, концы которого неподвижно закреплены. В привычных нам переменных это означает, что заданы два чисто винтовых бикватерниона истинных эйлеровых перемещений для начального и конечного сечений проволоки: ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi}(0)$ и ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi}(S)$. Каждый из них имеет нулевую дуальную часть и содержательную винтовую часть, определяемую шестью числами. Всего надо задать 12 чисел. По этой информации надо определить начальное и конечное значения бикватернионов или кватернионов, являющихся основными неизвестными в задаче. В разделе 7.17 в качестве основного геометрического неизвестного выступает собственный бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}$. В этом случае начальное и конечное значения основного неизвестного вычисляются по формулам:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}(0) = \exp\frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi}(0)}{2}; \quad {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}(S) = \exp\frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi}(S)}{2}. \tag{7.199} $$

Бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}$ уже не является чисто винтовым, однако он является нормированным, и это свойство появляется у него автоматически при вычислении по формулам (7.199).

Для раздела 7.16, где в качестве основного неизвестного принят бикватернион перемещений ${}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s)$, будут справедливы формулы:

$$ {}_{\mathbf{Y0}(0)}\mathbf{M}(0) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1}(0) \circ \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi}(0)}{2}; \quad {}_{\mathbf{Y0}(S)}\mathbf{M}(S) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{0}^{-1}(S) \circ \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi}(S)}{2}. \tag{7.200} $$

В разделе 7.18 в качестве основных неизвестных приняты кватернионы ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$. Они легко выражаются через ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} + \varpi \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$. Кватернион ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}$ является его основным компонентом, а кватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$ вычисляется по формуле:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(0) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(0) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(0); \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(S) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(S) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(S). \tag{7.201} $$

Кватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}$ – чисто векторный. Формулы (7.201) обеспечивают это.

Положение сечения проволоки в пространстве удобно задавать не при помощи бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Psi}(s)$, а при помощи двух чисто векторных кватернионов: ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\psi}(s)$ – кватерниона истинного эйлерова поворота для задания ориентации сечения и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ – кватерниона радиуса-вектора центра сечения для задания его положения в пространстве. Переход от этих кватернионов к бикватерниону ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}(s)$ легко выполняется по формулам:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s) = \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\psi}(s)}{2}; \quad {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(s) = \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)}{2}. \tag{7.202} $$

Мы рассмотрели пример с геометрическими краевыми условиями. Рассмотрим теперь статическое краевое условие. Естествен случай, когда нагрузка общего вида приложена к концевому сечению и задана в местной системе координат $\mathbf{Y}(S)$. Другими словами, задан бикватернион усилий ${}_{\mathbf{Y}(S)}\mathbf{U}(S)$. Нужно уметь выразить силовые переменные через этот бикватернион или его компоненты.

В разделе 7.16 в качестве основных неизвестных приняты бикватернион перемещений ${}_{\mathbf{Y0}(s)}\mathbf{M}(s)$ и сопряженный с ним бикватернион усилий ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}(s)$. В соответствии с формулой (7.153) бикватернион усилий ${}_{\mathbf{Y0}}\mathbf{P}(s)$ выражается так:

$$ {}_{\mathbf{Y0}(S)}\mathbf{P}(S) = 2 \cdot {}_{\mathbf{Y0}(S)}\mathbf{M}(S) \circ {}_{\mathbf{Y}(S)}\mathbf{U}(S). \tag{7.203} $$

В разделе 7.17 в качестве основных неизвестных приняты собственный бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}(s)$ и сопряженный с ним бикватернион усилий ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{Q}(s)$. Из формулы (7.174) следует:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{Q}(S) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Lambda}(S) \circ_{\mathbf{Y}(S)} \mathbf{U}(S). \tag{7.204} $$

В разделе 7.18 в качестве основных неизвестных приняты кватернионы ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ и сопряженные с ними кватернионы усилий ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{p}(s)$. На основании формул (7.194) можем записать:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}(S) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(S) \circ_{\mathbf{Y}(S)} \mathbf{u}^{\circ}(S); \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{p}(S) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(S) \circ_{\mathbf{Y}(S)} \mathbf{u}(S) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(S). \tag{7.205} $$

В приведенных формулах кроме бикватернионов (кватернионов) усилий присутствуют также геометрические бикватернионы (кватернионы), избавиться от которых не удается.

Будем исходить из того, что задачу Коши (задачу с начальными условиями) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений мы решать умеем. Поэтому все условия, заданные для начальной точки отрезка ($s = 0$), можем использовать непосредственно без какой-либо обработки. Выполнения условий, заданных на другом конце проволоки ($s = S$), надо добиться, задавая подходящие значения других переменных при $s = 0$.

Возвратимся к задаче расчета отрезка проволоки, концы которого неподвижно закреплены. В разделе 7.17 описаны два варианта разрешающих уравнений для этой задачи.

В первом из них в число основных неизвестных входят геометрический ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$ и силовой ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{Q}(s)$ бикватернионы. Начальные значения для геометрического бикватерниона известны. Для силового же бикватерниона они не определены, зато для бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$ заданы конечные значения. Это означает, что начальные значения для бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{Q}(s)$ надо подобрать такими, чтобы удовлетворялись значения для бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(S)$. Задача эта очень сложная, но принципиально выполнимая. Для ее решения применяются специальные методы.

Во втором варианте в число основных неизвестных входит только геометрический бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(s)$. Дифференциальные уравнения для этого случая получаются, если кватернион кривизн ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\kappa}(s)$ вычисляется по формуле (7.180). Силовой бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{Q}(s)$ в задаче не рассматривается, однако в формулу (7.180) входят компоненты чисто винтового произвольного постоянного бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{C}$. Именно эти компоненты надо выбрать такими, чтобы удовлетворялись заданные значения ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(S)$ на конце отрезка проволоки.

Если конец проволоки свободен от закреплений, а к нему приложена нагрузка, заданная в местной системе координат, то есть, задан бикватернион усилий ${}_{\mathbf{Y}(S)}\mathbf{U}(S)$, начальные значения нагрузки ${}_{\mathbf{Y}(0)}\mathbf{U}(0)$ надо подобрать так, чтобы на свободном конце проволоки реализовалось нужное усилие.

Отдельного рассмотрения заслуживает набор переменных ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ и сопряженных с ними ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{p}(s)$, описанный в разделе 7.18. В нем разделена информация о местонахождении сечения, содержащаяся в кватернионе ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$, и информация об ориентации этого сечения, содержащаяся в кватернионе ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$. Выбор в качестве основных неизвестных сопряженных пар: ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}(s)$, ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{p}(s)$ удобен с той точки зрения, что если на каком-то конце проволоки не задано геометрическое неизвестное, то сопряженное с ним силовое неизвестное на этом же конце должно быть равно нулю (или заданному значению, если к этому концу проволоки приложена нагрузка). Такое краевое условие называется естественным. Если ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(0) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r0}$, а ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(0)$ не задано, следует положить ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}(0) = 0$. Это будет означать, что начало участка проволоки закреплено к "земле" в точке с радиусом-вектором ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r0}$ посредством шарового шарнира. Можно представить себе закрепление, когда задана ориентация

сечения ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(0) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}$, а положение конца проволоки в пространстве ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(0)$ не задано. В этом случае надо положить ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{p}(s) = 0$.

7.20. Проволока, пропущенная сквозь втулку

В предыдущем разделе были рассмотрены относительно простые краевые условия: полное закрепление (защемление), свободный конец, шарнирное закрепление и т. п. Сейчас мы рассмотрим особый вид закрепления конца проволоки, когда проволока пропущена сквозь втулку, жестко закрепленную в пространстве (рис. 7.5). Точка входа во втулку определяется радиусом-вектором ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{b}$, ориентация втулки – единичным вектором ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}$. Проволока внутри втулки может свободно поворачиваться вокруг своей оси и перемещаться в продольном направлении.

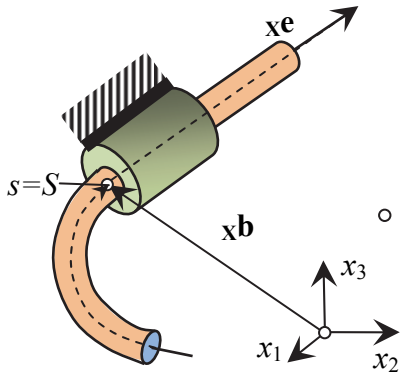


Рис. 7.5. Проволока, пропущенная сквозь втулку

Запишем условия закрепления во втулке конца проволоки с дуговой координатой S для системы неизвестных ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(s)$, ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$, ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}(s)$ и ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{p}(s)$, описанных в разделе 7.18. Первое условие, определяющее место втулки в пространстве, записывается непосредственно:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(S) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{b} . \qquad (7.206) $$

Это условие эквивалентно трем степеням свободы.

Второе условие, определяющее ориентацию втулки, имеет следующий вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{e} = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(S) \circ {}_{\mathbf{Y0}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(S) . \qquad (7.207) $$

Оно следует из формулы (7.183), поскольку ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}$ является ортом касательной к кривой, определяемой вектор функцией ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(s)$ в точке $s = S$. В развернутом виде оно выглядит так:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbf{X}}e_1 &= 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_0(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_2(S) + 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_1(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_3(S); \\ {}_{\mathbf{X}}e_2 &= 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_2(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_3(S) - 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_0(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}\lambda_1(S); \\ {}_{\mathbf{X}}e_3 &= {}_{\mathbf{X}}\lambda_0^2(S) - {}_{\mathbf{X}}\lambda_1^2(S) - {}_{\mathbf{X}}\lambda_2^2(S) + {}_{\mathbf{X}}\lambda_3^2(S). \end{aligned} \qquad (7.208) $$

Это условие эквивалентно двум степеням свободы. Удовлетворение любых двух равенств автоматически приводит к удовлетворению третьего, поскольку вектор ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}$ нормирован.

Свободный поворот проволоки внутри втулки требует выполнения еще одного условия: ${}_{\mathbf{Y}(S)}u^{\circ}{}_3(S) = 0$. Формула (7.194) дает такой результат:

$$ {}_{\mathbf{X}}\lambda_0(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}m_3(S) - {}_{\mathbf{X}}\lambda_1(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}m_2(S) + {}_{\mathbf{X}}\lambda_2(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}m_1(S) - {}_{\mathbf{X}}\lambda_3(S) \cdot {}_{\mathbf{X}}m_0(S) = 0 . \qquad (7.209) $$

Осталось написать последнее, седьмое, условие для определения оптимальной длины отрезка проволоки S, поскольку этот отрезок заканчивается в точке входа во втулку и его длина заранее не известна. Здесь, мы имеем дело с механической системой неопределенного размера. В теории оптимального управления, откуда

позаимствован принцип максимума Понтрягина, задача такого типа называется задачей со свободным временем (у нас – со свободной длиной).

Методика решения задач со свободным временем в теории оптимального управления является хорошо отработанной. В соответствии с нею неизвестное заранее оптимальное время определяется с привлечением дополнительного условия, которое базируется на гамильтониане H^* с подставленными в него оптимальными значениями управляющих переменных (оптимизированный гамильтониан). В общем случае, когда функции f_i ($i = 0, ..., n$) в формулах (7.87) зависят явно от s, это дополнительное условие имеет вид:

$$H^* = \int_0^S \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial s} \cdot p_i \cdot ds \,, \tag{7.210}$$

где p_i – сопряженные функции, удовлетворяющие уравнениям (7.97).

Это условие позволяет найти время или, в нашем случае, искомую дуговую координату S.

Разберемся с этим более подробно на примерах, представленных в разделах 7.16–7.18. В первую очередь, это касается явной зависимости функций f_i от дуговой координаты s. Как видно из формул (7.122), (7.154), (7.182), такая зависимость может возникнуть только от бикватерниона $_{Y0}\boldsymbol{\Omega 0}(s)$ или его компонентов $_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}(s)$ и $_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^\circ(s)$, характеризующих исходную естественную форму проволоки. Более подробно об исходной форме проволоки написано в разделе 7.4. Из-за того, что эта исходная форма получается только путем изгибания и скручивания проволоки (без растяжения и сдвигов), кватернион $_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^\circ$ постоянен по длине проволоки и не зависит от дуговой координаты s. Опасность явной зависимости функций f_i от s содержится только в кватернионе $_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}(s)$. Однако для простых исходных форм проволоки, коими являются прямолинейная форма, форма дуги окружности и форма спиральной пружины, кватернион $_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}$, а вместе с ним и функции f_i, не зависят от s. Отдавая себе отчет в том, что для сложных исходных форм проволоки нужно пользоваться дополнительным условием вида (7.210), в дальнейшем будем рассматривать лишь системы без явной зависимости функций f_i от s, которые называются автономными и для которых дополнительное условие имеет вид:

$$H^* = 0 \,. \tag{7.211}$$

Рассмотрим случай, когда в качестве кинематического неизвестного выступает бикватернион перемещений $_{Y0}\mathbf{M} = {}_{Y0}\boldsymbol{\mu} + \varpi\cdot{}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^\circ$, а в качестве силового – $_{Y0}\mathbf{P} = {}_{Y0}\mathbf{p} + \varpi\cdot{}_{Y0}\mathbf{p}^\circ$ (см. раздел 7.16). Дополнительное условие получим, подставив выражение для кватерниона оптимальных кривизн из формулы (7.138) в формулу для гамильтониана (7.127):

$$\begin{aligned} H^* = \operatorname{scal}\left[\frac{({}_{Y0}\bar{\mathbf{p}} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^\circ + {}_{Y0}\bar{\mathbf{p}} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}) \circ ({}_{Y0}\bar{\boldsymbol{\mu}} \circ {}_{Y0}\mathbf{p}^\circ + {}_{Y0}\bar{\boldsymbol{\mu}}^\circ \circ {}_{Y0}\mathbf{p})}{8 \cdot D} + {}_{Y0}\bar{\mathbf{p}}^\circ \circ \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}}{2} \right] + \\ + \operatorname{scal}\left({}_{Y0}\bar{\mathbf{p}} \circ \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^\circ \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}^\circ}{2} + {}_{Y0}\bar{\mathbf{p}} \circ \frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\mu} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^\circ - {}_{Y0}\boldsymbol{\omega 0}^\circ \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\mu}}{2} \right) = 0. \end{aligned} \tag{7.212}$$

Для случая, описанного в разделе 7.17, где в качестве кинематического неизвестного используется бикватернион ${}_{X}\mathbf{\Lambda} = {}_{Y0}\boldsymbol{\lambda} + \varpi\cdot{}_{Y0}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}$, а в качестве силового неизвестного – бикватернион ${}_{X}\mathbf{Q} = {}_{Y0}\mathbf{q} + \varpi\cdot{}_{Y0}\mathbf{q}^{\circ}$, гамильтониан представляется формулой (7.159), а оптимальный кватернион кривизн – формулой (7.170). Подставляя выражение (7.170) в формулу (7.159), получим выражение для искомого дополнительного условия:

$$H^{*} = \frac{D}{2}\cdot \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{X}\overline{\mathbf{q}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} + {}_{X}\overline{\mathbf{q}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}}{2\cdot D} \circ \frac{{}_{X}\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ{}_{X}\mathbf{q}^{\circ} + {}_{X}\overline{\boldsymbol{\lambda}}^{\circ}\circ{}_{X}\mathbf{q}}{2\cdot D} \right) + \\ + \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{X}\overline{\mathbf{q}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{\circ} + {}_{X}\overline{\mathbf{q}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}}{2\cdot D} \circ {}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} + {}_{X}\overline{\mathbf{q}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}\circ\frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}}{2} \right) = 0. \tag{7.213}$$

Рассмотрим теперь случай, описанный в разделе 7.18, когда в качестве кинематических неизвестных выступают кватернионы ${}_{X}\boldsymbol{\lambda}$ и ${}_{X}\mathbf{r}$, а в качестве силовых – сопряженные с ними кватернионы ${}_{X}\mathbf{m}$ и ${}_{X}\mathbf{p}$. Подставим выражение для кватерниона кривизн (7.188) в формулу для гамильтониана (7.185), в результате чего получим:

$$H^{*} = \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{X}\overline{\mathbf{m}}\circ{}_{X}\mathbf{m}}{8\cdot D} \right) + \operatorname{scal}\left({}_{X}\overline{\mathbf{m}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}\circ\frac{{}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}}{2} \right) + \operatorname{scal}({}_{X}\overline{\mathbf{p}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}_{Y0}\circ\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{-1}) = 0\,. \tag{7.214}$$

Из принципа максимума Понтрягина известно, что оптимизированный гамильтониан для каждой равновесной формы проволоки является константой, не зависящей от дуговой координаты s. Для того, чтобы установить механический смысл этого неочевидного утверждения, запишем выражение для оптимизированного гамильтониана через внутренние усилия в проволоке. Воспользуемся для этого выражением (7.214) и формулами (7.194). Учитывая то, что кватернион ${}_{X}\boldsymbol{\lambda}$ нормирован и для него обращение равносильно сопряжению, на основании формул (7.194) можно записать:

$${}_{X}\overline{\mathbf{p}} = {}_{X}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{Y}\overline{\mathbf{u}}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{-1};\quad {}_{X}\mathbf{m} = 2\cdot{}_{X}\boldsymbol{\lambda}\circ{}_{Y}\mathbf{u}^{\circ};\quad {}_{X}\overline{\mathbf{m}} = 2\cdot{}_{Y}\overline{\mathbf{u}}^{\circ}\circ{}_{X}\boldsymbol{\lambda}^{-1}\,. \tag{7.215}$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.214), получим:

$$H^{*} = \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{Y}\overline{\mathbf{u}}^{\circ}\circ{}_{Y}\mathbf{u}^{\circ}}{2\cdot D} \right) + \operatorname{scal}\left({}_{Y}\overline{\mathbf{u}}^{\circ}\circ{}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} \right) + \operatorname{scal}({}_{Y}\overline{\mathbf{u}}\circ{}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ})\,. \tag{7.216}$$

Поскольку ${}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0}^{\circ} = [0, 0, 0, 1]$, можем переписать:

$$H^{*} = \operatorname{scal}\left(\frac{{}_{Y}\overline{\mathbf{u}}^{\circ}\circ{}_{Y}\mathbf{u}^{\circ}}{2\cdot D} \right) + \operatorname{scal}\left({}_{Y}\overline{\mathbf{u}}^{\circ}\circ{}_{Y0}\boldsymbol{\omega}\mathbf{0} \right) + {}_{Y}u^{\circ}{}_{3} \tag{7.217}$$

или покомпонентно:

$$H^{*} = \frac{{}_{Y}u^{\circ 2}_{1} + {}_{Y}u^{\circ 2}_{2} + {}_{Y}u^{\circ 2}_{3}}{2\cdot D} + \left({}_{Y}u^{\circ}{}_{1}\cdot{}_{Y0}\omega 0_{1} + {}_{Y}u^{\circ}{}_{2}\cdot{}_{Y0}\omega 0_{2} + {}_{Y}u^{\circ}{}_{3}\cdot{}_{Y0}\omega 0_{3} \right) + {}_{Y}u_{3}\,. \tag{7.218}$$

В эту формулу входят все три компонента из моментной группы внутренних усилий и лишь один компонент из силовой группы – продольное усилие в проволоке ${}_{Y}u_{3}$. Рассматривая равенство (7.218) как еще один первый интеграл для решаемой задачи

(например, в постановке раздела 7.12), можем записать общее решение для продольного усилия:

$$ {}_{\mathbf{Y}}u_3 = CH - \frac{{}_{\mathbf{Y}}u^{\circ 2}_1 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ 2}_2 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ 2}_3}{2 \cdot D} - \left({}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}_1 \cdot_{\mathbf{Y0}} \omega 0_1 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}_2 \cdot_{\mathbf{Y0}} \omega 0_2 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}_3 \cdot_{\mathbf{Y0}} \omega 0_3 \right), \qquad (7.219) $$

где CH – произвольная постоянная величина.

Если речь идет о задаче, где длина участка проволоки S подлежит определению, то равенство (7.219) будет справедливым при $CH = 0$. Это означает, что в задачах с оптимальной длиной отрезка проволоки продольное усилие в любом сечении проволоки можно выразить через изгибающие и крутящий моменты в этом же сечении:

$$ {}_{\mathbf{Y}}u_3 = -\frac{{}_{\mathbf{Y}}u^{\circ 2}_1 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ 2}_2 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ 2}_3}{2 \cdot D} - \left({}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}_1 \cdot_{\mathbf{Y0}} \omega 0_1 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}_2 \cdot_{\mathbf{Y0}} \omega 0_2 + {}_{\mathbf{Y}}u^{\circ}_3 \cdot_{\mathbf{Y0}} \omega 0_3 \right). \qquad (7.220) $$

Рассмотрим краевую задачу для отрезка проволоки неопределенной длины S с такими граничными условиями. Начало отрезка проволоки ($s = 0$) закреплено от смещений и поворотов. При этом местная система координат $\mathbf{Y}(0)$, связанная с началом отрезка проволоки, находится в точке, определяемой радиусом-вектором ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(0)$ и ориентирована так, как неподвижная система координат, повернутая на вектор истинного эйлерова поворота ${}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\psi}(0)$. Очевидно, что это закрепление соответствует шести элементарным связям. Кинематическое неизвестное $\boldsymbol{\lambda}$ в начале отрезка может быть определено по формуле:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(0) = \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\psi}(0)}{2}. \qquad (7.221) $$

Конец отрезка ($s = S$) ограничен в своих перемещениях втулкой, положение которой определяется радиусом-вектором ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{b}$, а ориентация – единичным вектором ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}$. Выше были приведены семь независимых условий, содержащихся в формулах (7.206), (7.207), (7.209), (7.217), выполнение которых свидетельствует о том, что проволока пропущена сквозь втулку и должным образом в ней размещена. Для удовлетворения этим семи условиям нужно иметь по меньшей мере семь произвольных постоянных величин. Этими величинами могут быть, например, шесть внутренних усилий в начальном сечении проволоки ${}_{\mathbf{Y}(0)}u_1(0)$, ${}_{\mathbf{Y}(0)}u_2(0)$, ${}_{\mathbf{Y}(0)}u_3(0)$, ${}_{\mathbf{Y}(0)}u^{\circ}_1(0)$, ${}_{\mathbf{Y}(0)}u^{\circ}_2(0)$, ${}_{\mathbf{Y}(0)}u^{\circ}_3(0)$ и длина отрезка S. Внутренние усилия дают возможность вычислить основные неизвестные в начальном сечении проволоки:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{p}(0) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(0) \circ_{\mathbf{Y}(0)} \mathbf{u}(0) \circ_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\lambda}^{-1}(0); \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}(0) = 2 \cdot_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\lambda}(0) \circ_{\mathbf{Y}(0)} \mathbf{u}^{\circ}(0), \qquad (7.222) $$

чтобы начать процесс интегрирования системы дифференциальных уравнений по методу Рунге-Кутты. Определение нужных значений внутренних усилий и длины отрезка – сложная проблема, которая не имеет отношения к кватернионам.

8. Формообразование криволинейных стержней

8.1. Геометрия криволинейного стержня

Криволинейный стержень в сопротивлении материалов и в теории упругости – это тело, геометрическая форма которого образуется движением в пространстве плоской фигуры (сечения), при этом одна из точек этого сечения (полюс) всегда остается на некоторой гладкой кривой (оси стержня), а плоскость фигуры нормальна этой кривой. В зависимости от вида сечения различают криволинейный стержень постоянного сечения и криволинейный стержень переменного сечения. По виду оси криволинейный стержень может быть плоским (если его ось – плоская кривая) и пространственным (если его ось – пространственная кривая). Разновидностью криволинейного стержня является естественно закрученный криволинейный стержень, отличающийся тем, что плоская фигура поперечного сечения при своем движении по оси криволинейного стержня одновременно вращается вокруг касательной к ней.

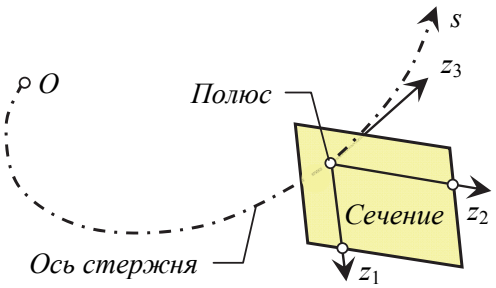


Рис. 8.1. К геометрии криволинейного стержня

Ось стержня пересекает сечение в полюсе, который не обязательно находится в его центре тяжести. Это сечение характеризуется дуговой координатой s, отсчитываемой вдоль оси стержня от начальной точки O. С сечением связана правая координатная система z_1, z_2, z_3, начало которой находится в полюсе. Ось z_3 перпендикулярна сечению, касательна к оси стержня и направлена в сторону возрастания дуговой координаты s. Оси z_1, z_2, лежат в плоскости сечения и используются в качестве системы координат для этого сечения.

8.2. Самолетная аналогия

Поставим перед собой простейшую задачу – научиться конструировать криволинейные стержни постоянного поперечного сечения. Для решения этой задачи применим наглядный подход, который назовем самолетной аналогией. Попытаемся конструировать криволинейный стержень аналогично тому, как летчик, пользуясь рычагами управления самолетом, выполняет фигуры высшего пилотажа. При этом траектория полета самолета – это ось стержня. Тело стержня будем определять, полагая, что пропеллер самолета имеет форму поперечного сечения стержня. Перемещаясь в пространстве вместе с самолетом и вращаясь (не очень быстро), пропеллер оставляет за собой след, который будем трактовать как тело стержня. Теперь перейдем к изучению движения самолета.

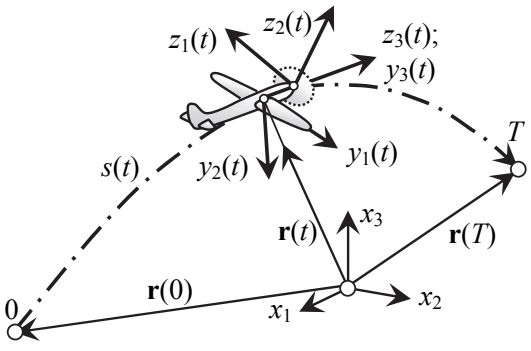


Рис. 8.2. Самолетная аналогия

Итак, в трехмерном пространстве перемещается самолет (рис. 8.2). Будем различать в нем корпус и пропеллер, полагая их твердыми телами. Введем в рассмотрение три декартовы системы координат. Первая из них – неподвижная $\mathbf{X}$ – x_1, x_2, x_3, жестко связанная с землей, вторая – подвижная $\mathbf{Y}(t)$ – $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, жестко связанная с корпусом самолета, и третья – подвижная $\mathbf{Z}(t)$ – $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, жестко связанная с пропеллером. Положения подвижных систем координат зависят от времени.

Координатные системы $\mathbf{Y}(t)$ и $\mathbf{Z}(t)$ на рисунке разнесены на некоторое расстояние вдоль оси самолета, чтобы в них легче было разобраться. На самом деле будем считать, что начала этих систем находятся в базовой точке корпуса самолета (полюсе), а, кроме этого, оси $y_3(t)$ и $z_3(t)$ совпадают. Пропеллер по отношению к корпусу самолета обладает лишь одной степенью свободы – вращением относительно оси $y_3(t)$. Заметим, что координатная система $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ является (с точностью до нумерации осей) стандартной самолетной координатной системой (см. раздел 2.9.3). Ось $y_3(t)$ называется осью крена, ось $y_1(t)$ – осью тангажа и ось $y_2(t)$ – осью скольжения.

Возвратимся к разделу 4.7, где показано, что положение твердого тела (в нашем случае – корпуса самолета) в трехмерном пространстве может быть описано одним чисто винтовым бикватернионом. Назовем этот бикватернион $\mathbf{\Psi}(t)$. Твердое тело имеет шесть степеней свободы, а бикватернион имеет восемь независимых компонентов. Это означает, что у бикватерниона есть возможность хранить информацию еще о двух дополнительных степенях свободы. Попытаемся, подобно тому, как это было сделано в задаче о расчете гибком вале (см. раздел 6.1), использовать свободные информационные возможности определяющего бикватерниона. Существенными величинами при переходе от самолетной аналогии к стержню является положение пропеллера (ориентация поперечного сечения стержня) и длина траектории самолета (дуговая координата оси стержня). Информацию об этих величинах занесем в дуальную часть бикватерниона $\mathbf{\Psi}(t)$. Тогда компоненты этого бикватерниона:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} \psi_0(t) + \varpi \cdot \psi^\circ{}_0(t) \\ \psi_1(t) + \varpi \cdot \psi^\circ{}_1(t) \\ \psi_2(t) + \varpi \cdot \psi^\circ{}_2(t) \\ \psi_3(t) + \varpi \cdot \psi^\circ{}_3(t) \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

будут иметь следующий физический смысл: $\psi_0(t)$ – угол поворота пропеллера относительно корпуса самолета; $\psi^\circ{}_0(t)$ – длина траектории базовой точки самолета; $\psi_1(t) + \varpi \cdot \psi^\circ{}_1(t)$; $\psi_2(t) + \varpi \cdot \psi^\circ{}_2(t)$; $\psi_3(t) + \varpi \cdot \psi^\circ{}_3(t)$ – дуальные компоненты винта истинного эйлерова перемещения, переводящего неподвижную систему координат $\mathbf{X}$ из исходного в положение, когда она совпадает с подвижной системой координат $\mathbf{Y}(t)$. Бикватернион $\mathbf{\Psi}(t)$ подлежит определению. Заданным есть бикватернион скоростей

$$ {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_0(t) + \varpi \cdot {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_0(t) \\ {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_1(t) + \varpi \cdot {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_1(t) \\ {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_2(t) + \varpi \cdot {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_2(t) \\ {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_3(t) + \varpi \cdot {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_3(t) \end{bmatrix}, \tag{8.2} $$

где ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_0(t)$ – угловая скорость вращения пропеллера относительно корпуса самолета; ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_0(t)$ – линейная (скаляр) скорость перемещения базовой точки самолета; ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_1(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_2(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_3(t)$ – компоненты вектора угловой скорости корпуса самолета в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$; ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_1(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_2(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_3(t)$ – компоненты вектора линейной скорости базовой точки самолета в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$.

Здесь приведена несколько обобщенная расшифровка компонентов бикватерниона скоростей. Поскольку самолет летает не в произвольную сторону, а только носом (осью y_3) вперед, набор компонентов линейных скоростей будет иметь частный вид:

$$ {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_1(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_2(t) = 0; \quad {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_3(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_0(t) = v(t) \geq 0 . \tag{8.3} $$

Здесь $v(t)$ – линейная скорость самолета. Она должна быть неотрицательна.

При обозначениях бикватерниона $\boldsymbol{\Psi}(t)$ не указана привязка к системе координат, поскольку его компоненты в системах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}(t)$ одинаковы.

Таким образом, можно сформулировать задачу о движении самолета: Пусть известно начальное значение бикватерниона $\boldsymbol{\Psi}(0)$. Пусть известен также частный вид бикватерниона скоростей $\boldsymbol{\Omega}(t)$, учитывающий зависимости (8.3), как функция времени, изменяющегося в интервале $[0 \leq t \leq T]$. Требуется определить бикватернион $\boldsymbol{\Psi}(t)$ как функцию времени в том же интервале.

8.3. Решение задачи о движении самолета

Задача о движении самолета практически повторяет задачу о движении твердого тела в трехмерном пространстве, решаемую в разделе 4.8. Различие заключается в том, что в задаче о движении самолета присутствуют две дополнительные скалярные переменные $\psi_0(t)$ – угол поворота пропеллера относительно корпуса самолета; $\psi^\circ{}_0(t)$ – длина траектории базовой точки самолета. Мы поступим следующим образом. Воспользуемся кинематическим дифференциальным уравнением для движения твердого тела и проверим правильно ли преобразуются дополнительно введенные переменные $\psi_0(t)$ и $\psi^\circ{}_0(t)$.

Прежде всего, сделаем замену переменных и вместо бикватерниона $\boldsymbol{\Psi}(t)$ будем пользоваться его функцией – половинным экспоненциальным бикватернионом:

$$ \boldsymbol{\Lambda}(t) = \exp\frac{\boldsymbol{\Psi}(t)}{2} . \tag{8.4} $$

Для этого бикватерниона в разделе 4.8 приводится кинематическое дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять искомый бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}(t)$. Это уравнение имеет вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(t) = \mathbf{\Lambda}(t) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2}, \tag{8.5} $$

где штрихом обозначена аддитивная производная по времени t.

Для проверки правильности дифференциальных зависимостей для переменных $\psi_0(t)$ и $\psi^\circ_0(t)$ представим уравнение (8.5) в таком виде:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t+dt) - {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2} \cdot dt\,. \tag{8.6} $$

Дальнейшие преобразования выглядят так:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t+dt) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) \circ \left(\mathbf{I} + \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2} \cdot dt \right); \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t+dt)}{2} = \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t)}{2} \circ \exp\left(\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2} \cdot dt \right). \tag{8.7} $$

Поскольку при перемножении бикватернионов их модули также перемножаются, можно записать:

$$ \left| \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t+dt)}{2} \right| = \left| \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t)}{2} \right| \cdot \left| \exp\left(\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2} \cdot dt \right) \right|. \tag{8.8} $$

Далее вспомним [см. (9.88)], что модуль половинной экспоненты бикватерниона $\mathbf{\Psi}$ равен половинной экспоненте дуальной части этого бикватерниона Ψ_0. Тогда получим:

$$ \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\Psi_0(t+dt)}{2} = \exp \frac{{}_{\mathbf{X}}\Psi_0(t)}{2} \cdot \exp\left(\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\Omega_0(t)}{2} \cdot dt \right). \tag{8.9} $$

Заметим, теперь под знаком экспоненты стоят уже не бикватернионы, а дуальные числа. Взяв удвоенные логарифмы от левой и правой частей этого равенства, будем иметь:

$$ {}_{\mathbf{X}}\Psi_0(t+dt) = {}_{\mathbf{X}}\Psi_0(t) + {}_{\mathbf{Y}(t)}\Omega_0(t) \cdot dt; \quad {}_{\mathbf{X}}\Psi_0{}'(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\Omega_0(t)\,. \tag{8.10} $$

Расписав второе равенство покомпонентно, получим:

$$ {}_{\mathbf{X}}\psi_0'(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_0(t); \quad {}_{\mathbf{X}}\psi^\circ{}_0{}'(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ{}_0(t)\,. \tag{8.11} $$

Первое из этих равенств означает, что производная по времени от угла поворота пропеллера равна скорости его вращения. Второе равенство означает, что производная по времени от дуговой координаты равна скорости движения самолета. То есть, дифференциальное уравнение (8.5) правильно отражает не только движение корпуса самолета, но и вращение пропеллера, а также формирование дуговой координаты.

Пользуясь принципом перенесения Котельникова-Штуди, на основании формулы (2.142) можно, как альтернативу аддитивному дифференциальному уравнению (8.5), записать мультипликативное дифференциальное уравнение:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(t) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2}, \tag{8.12} $$

где крестиком обозначена правая мультипликатитивная производная по времени.

Это уравнение имеет очень простой вид и позволяет выразить общее решение в виде мультипликативной квадратуры [см. формулу (2.162)]:

$$ \mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Lambda}(0) \circ \underset{\tau=0}{\overset{t}{\bigcap}} \underrightarrow{\exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(\tau)}{2} \cdot d\tau\right]} = \mathbf{\Lambda}(0) \circ \underset{\tau=0}{\overset{t}{\bigcap}} \underrightarrow{\left[\mathbf{I} + \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(\tau)}{2} \cdot d\tau\right]}. \tag{8.13} $$

Когда решение для половинного экспоненциального бикватерниона найдено, можно определить и бикватернион истинного эйлерова перемещения:

$$ \mathbf{\Psi}(t) = 2 \cdot \mathrm{Ln}\left[\mathbf{\Lambda}(t)\right], \tag{8.14} $$

компоненты которого расшифрованы в разделе 8.2.

8.4. Зависимости для координатной системы, связанной с пропеллером

Пусть $\mathbf{\Phi}(t)$ – бикватернион истинного эйлерова перемещения, который переводит общую систему координат $\mathbf{X}$ в такое положение, когда она совпадает с системой координат $\mathbf{Z}(t)$, связанной с пропеллером самолета, а $\mathbf{\Psi}(t)$ – бикватернион истинного эйлерова перемещения, который переводит общую систему координат $\mathbf{X}$ в такое положение, когда она совпадает с системой координат $\mathbf{Y}(t)$, связанной с корпусом самолета. Считаем, что бикватернион $\mathbf{\Psi}(t)$ известен. Задача заключается в том, чтобы выразить компоненты бикватерниона $\mathbf{\Phi}(t)$ через компоненты бикватерниона $\mathbf{\Psi}(t)$.

Для того, чтобы перевести координатную систему $\mathbf{X}$ в такое положение, когда она совпадет с системой координат $\mathbf{Z}(t)$, надо выполнить два перемещения. Вначале ее надо совместить с системой координат $\mathbf{Y}(t)$, что выполняется при помощи бикватерниона $\mathbf{\Psi}(t)$, а затем перевести в такое положение, когда она совместится с системой координат $\mathbf{Z}(t)$, что выполняется в системе координат $\mathbf{Y}(t)$ при помощи бикватерниона ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{C}(t) = [0, 0, 0, \psi_0(t)]$, осуществляющего поворот вокруг оси $y_3(t)$ на угол $\psi_0(t)$.

Введем в рассмотрение половинные экспоненциальные бикватернионы для каждого из рассмотренных выше бикватернионов истинного эйлерова перемещения:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) = \exp\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t)}{2}; \quad {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(t) = \exp\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Phi}(t)}{2}; \quad {}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Xi}(t) = \exp\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{C}(t)}{2}. \tag{8.15} $$

Бикватернион ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Xi}(t)$ выражается покомпонентно так:

$$ {}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Xi}(t) = \left[\cos\frac{\psi_0(t)}{2}; 0; 0; \sin\frac{\psi_0(t)}{2}\right]. \tag{8.16} $$

Заметим, что у бикватернионов ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{C}(t)$ и ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Xi}(t)$ моментная часть нулевая.

Половинная экспонента искомого бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Phi}(t)$ выражается формулой:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(t) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) \circ {}_{\mathbf{Y}(t)}\Xi(t) = \begin{pmatrix} {}_{\mathbf{X}}\Lambda_0(t)\cdot\cos\dfrac{\psi_0(t)}{2} - {}_{\mathbf{X}}\Lambda_3(t)\cdot\sin\dfrac{\psi_0(t)}{2} \\ {}_{\mathbf{X}}\Lambda_1(t)\cdot\cos\dfrac{\psi_0(t)}{2} + {}_{\mathbf{X}}\Lambda_2(t)\cdot\sin\dfrac{\psi_0(t)}{2} \\ {}_{\mathbf{X}}\Lambda_2(t)\cdot\cos\dfrac{\psi_0(t)}{2} - {}_{\mathbf{X}}\Lambda_1(t)\cdot\sin\dfrac{\psi_0(t)}{2} \\ {}_{\mathbf{X}}\Lambda_3(t)\cdot\cos\dfrac{\psi_0(t)}{2} + {}_{\mathbf{X}}\Lambda_0(t)\cdot\sin\dfrac{\psi_0(t)}{2} \end{pmatrix}. \qquad (8.17) $$

Сам же искомый бикватернион можно определить по формуле:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Phi}(t) = 2\cdot\mathrm{Ln}\left[{}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(t)\right]. \qquad (8.18) $$

Нетрудно заметить, что дуальная часть бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Phi}(t)$ равна дуальной части бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t)$. Это означает, что $\varphi_0(t)$ – угол поворота пропеллера относительно корпуса самолета; $\varphi^\circ_0(t)$ – длина траектории базовой точки самолета.

8.5. Формообразование криволинейного стержня

Для решения задач формообразования криволинейных стержней (рис. 8.3) будем пользоваться результатами, полученными при изучении движения самолета, истолковывая их в соответствии с самолетной аналогией. Как уже было отмечено в разделе 8.2, траектория самолета моделирует ось стержня, пропеллер моделирует поперечное сечение стержня, а трехмерный след пропеллера в пространстве моделирует тело криволинейного стержня. В этом перечне аналогий остался открытым вопрос о том, что же моделирует корпус самолета. Отвечая на него, отметим, что корпус самолета моделирует вспомогательную подвижную систему координат, необходимую для построения оси стержня.

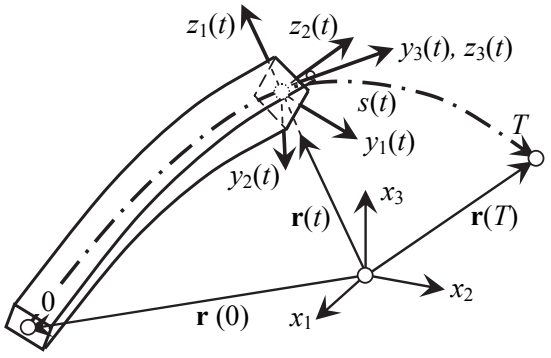


Рис. 8.3. Формообразование стержня

Так же, как и в задаче о движении самолета, будем различать три системы координат. Первая из них – неподвижная $\mathbf{X} – x_1, x_2, x_3$, жестко связанная с землей, вторая – подвижная $\mathbf{Y}(t)$ – $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, помогающая строить ось стержня, и третья – подвижная $\mathbf{Z}(t) – z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, жестко связанная с поперечным сечением стержня и определяющая своими осями $z_1(t)$ и $z_2(t)$ координаты точки этого сечения. Переменную t в задаче формообразования стержней можно интерпретировать как некоторый независимый параметр, монотонно возрастающий по длине стержня и принимающий значения из интервала $[0, T]$.

Стержень характеризуется бикватернионной функцией $\mathbf{\Psi}(t)$ скалярного параметра t. Каждому значению t соответствует поперечное сечения стержня. Все сечения

геометрически одинаковы. Они отличаются лишь расположением в пространстве. Компоненты $\mathbf{\Psi}(t)$ при фиксированном t имеют следующий физический смысл: $\psi_0(t)$ – угол поворота сечения относительно оси $y_3(t)$ вспомогательной системы $\mathbf{Y}(t)$; $\psi^\circ_0(t)$ – дуговая координата $s(t)$ на оси стержня; $\psi_1(t) + \varpi\cdot\psi^\circ_1(t)$; $\psi_2(t) + \varpi\cdot\psi^\circ_2(t)$; $\psi_3(t) + \varpi\cdot\psi^\circ_3(t)$ – дуальные компоненты винта истинного эйлерова перемещения, переводящего неподвижную систему координат $\mathbf{X}$ из исходного в положение, когда она совпадает со вспомогательной подвижной системой координат $\mathbf{Y}(t)$.

Не всякая бикватернионная функция параметра t соответствует криволинейному стержню. Базовые точки сечений должны образовывать непрерывную и гладкую ось стержня, а поперечные сечения должны быть расположены перпендикулярно этой оси. Для достижения этой цели используется бикватернионная функция скоростей ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)$ того же скалярного параметра t, привязанная к вспомогательной системе координат $\mathbf{Y}(t)$. Компоненты этой функции имеют следующий физический смысл: ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_0(t)$ – угловая скорость поворота сечения относительно оси $y_3(t)$ вспомогательной системы координат $\mathbf{Y}(t)$; ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_0(t)$ – линейная скорость (абсолютная величина) перемещения базовой точки сечения; ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_1(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_2(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_3(t)$ – компоненты вектора угловой скорости сечения в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$; ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_1(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_2(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_3(t)$ – компоненты вектора линейной скорости базовой точки сечения в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$. Для того, чтобы сечения были перпендикулярны оси стержня, набор компонентов линейных скоростей должен иметь следующий вид:

$$ {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_1(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_2(t) = 0; \quad {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_3(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega^\circ_0(t) = v(t) \ge 0 . \tag{8.19} $$

Здесь $v(t)$ – линейная скорость перемещения сечения. Она должна быть неотрицательна.

Для вычислительных целей удобно пользоваться не бикватернионом истинного эйлерова перемещения $\mathbf{\Psi}(t)$, а его аналитической функцией:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) = \exp\frac{{}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t)}{2} . \tag{8.20} $$

Основными дифференциальными уравнениями для поиска формы стержня будем считать аддитивное (8.5):

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}'(t) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2} \tag{8.21} $$

и мультипликативное (8.12):

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{\times}(t) = \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)}{2} \tag{8.22} $$

уравнения. Они позволяют по бикватерниону скоростей ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)$, заданному в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$, построить тело криволинейного стержня. Если задать пять произвольных непрерывных функций ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_0(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_1(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_2(t)$, ${}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_3(t)$ и $v(t)$ и составить из них бикватернион скоростей ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)$, то в результате решения дифференциальных уравнений (8.21) или (8.22) получим криволинейный стержень,

удовлетворяющий оговоренным выше требованиям. Наиболее продвинутый результат по получению общего решения уравнения (8.22) имеет вид мультипликативной квадратуры (8.13):

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Lambda}(0) \circ \bigcap_{\tau=0}^{t} \underrightarrow{\exp\left[\frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(\tau)}{2} \cdot d\tau\right]} = \mathbf{\Lambda}(0) \circ \bigcap_{\tau=0}^{t} \underrightarrow{\left[\mathbf{I} + \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(\tau)}{2} \cdot d\tau\right]}. \qquad (8.23)$$

По полученной бикватернионной функции можно восстановить искомый бикватернион:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t) = 2 \cdot \mathrm{Ln}\, {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t). \qquad (8.24)$$

Эта бикватернионная функция содержит в себе полную информацию о криволинейном стержне, но она представлена в несколько необычном виде. Для того, чтобы определить с ее помощью положение системы координат $\mathbf{Z}(t)$, связанной с сечением, надо вначале переместить координатную систему $\mathbf{X}$ до совмещения ее со вспомогательной системой $\mathbf{Y}(t)$ при помощи бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Psi}(t)$, а затем повернуть ее на угол ${}_{\mathbf{X}}\psi_0(t)$ вокруг оси y_3. Бикватернионная функция ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Phi}(t)$, вычисляемая по формулам (8.17) и (8.18), позволяет это сделать стандартным путем посредством одного перемещения.

Ось стержня можно определить при помощи бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) + \varpi \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t)$. Для этого нужно воспользоваться формулой (4.178):

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(t) = 2 \cdot {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t) \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}(t). \qquad (8.25)$$

Компоненты кватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(t)$ имеют следующий геометрический смысл: ${}_{\mathbf{X}}r_0(t)$ – дуговая координата $s(t)$; ${}_{\mathbf{X}}r_1(t)$, ${}_{\mathbf{X}}r_2(t)$, ${}_{\mathbf{X}}r_3(t)$ – координаты радиуса-вектора, соединяющего начало неподвижной системы координат $\mathbf{X}$ с началом подвижной системы координат $\mathbf{Y}(t)$, представленные в неподвижной системе координат (см. рис. 8.3).

8.6. Кривизна и кручение оси стержня

Рассмотрим параметры оси стержня, определяемой уравнениями (8.21) и (8.25), с позиций классической дифференциальной геометрии [49], считая известным бикватернион скоростей ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t) = {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t) + \varpi \cdot {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}^{\circ}(t)$. Поэлементное выражение его компонентов таково:

$${}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t) = \left[{}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_0(t); {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_1(t); {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_2(t); {}_{\mathbf{Y}(t)}\omega_3(t)\right]; \; {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}^{\circ}(t) = \left[{}_{\mathbf{Y}(t)}v(t); 0; 0; {}_{\mathbf{Y}(t)}v(t)\right]. \qquad (8.26)$$

Искомыми параметрами будем считать кривизну $\kappa(t)$ и кручение $\tau(t)$ оси стержня, а также направляющие косинусы касательной, нормали и бинормали в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$.

Для этой цели заблаговременно вычислим производные по параметру t кватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}(t)$, определяемого формулой (8.25), до третьего порядка включительно и представим их в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$. Для того, чтобы эти производные были выражены через компоненты бикватерниона скоростей ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)$, надо учитывать дифференциальные зависимости (8.21), из которых следует:

$$ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}'(t) = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) \circ \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)}{2}; \quad {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ\prime}(t) = \frac{{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}(t) \circ {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}^{\circ}(t) + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\circ}(t) \circ {}_{\mathbf{Y}(t)}\boldsymbol{\omega}(t)}{2}. \tag{8.27} $$

В дальнейших выкладках будем опускать скобки (t), выражающие функциональную зависимость от параметра t.

Первые производные вытекают из уравнения (8.25):

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}' = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}. \tag{8.28} $$

После перехода к системе координат $\mathbf{Y}$ они оказываются равными кватерниону ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ}$:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}' = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}' \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} = {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} = \left[v, 0, 0, v\right]. \tag{8.29} $$

Вторые производные получим, дифференцируя (8.28) с использованием равенства:

$$ ({}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1})' = -{}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}' \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}. \tag{8.30} $$

В неподвижной системе координат будем иметь:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{r}'' = {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}' \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} + {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ\prime} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} - {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda} \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1} \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}' \circ {}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\lambda}^{-1}, \tag{8.31} $$

а переходя к системе координат $\mathbf{Y}$, получим:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}'' = \frac{{}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega} \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} - {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ} \circ {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}}{2} + {}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}^{\circ\prime} = \left[v'; \; v \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_2; -v \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_1; \; v'\right]. \tag{8.32} $$

Третьи производные можно получить аналогично:

$$ {}_{\mathbf{Y}}\mathbf{r}''' = \begin{bmatrix} v'' \\ v \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 + v \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_2' + 2 \cdot v' \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \\ v \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_3 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 - v \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_1' - 2 \cdot v' \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \\ v'' - v \cdot ({}_{\mathbf{Y}}\omega_1^2 + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2^2) \end{bmatrix}. \tag{8.33} $$

Для определения кривизны оси стержня воспользуемся формулой [49]:

$$ \kappa^2 = \frac{({}_{\mathbf{Y}}r_1'^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_2'^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_3'^2) \cdot ({}_{\mathbf{Y}}r_1''^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_2''^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_3''^2) - ({}_{\mathbf{Y}}r_1' \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_1'' + {}_{\mathbf{Y}}r_2' \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_2'' + {}_{\mathbf{Y}}r_3' \cdot {}_{\mathbf{Y}}r_3'')^2}{({}_{\mathbf{Y}}r_1'^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_2'^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_3'^2)^3}, \tag{8.34} $$

выражающей квадрат кривизны через первые и вторые производные координат оси стержня по времени. Подставляя их значения из формул (8.29) и (8.32), получим:

$$ \kappa^2 = \frac{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1^2 + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2^2}{v^2}. \tag{8.35} $$

Несмотря на то, что в формуле (8.32) присутствуют ускорения $v'(t)$, кривизна оси стержня от них не зависит.

Кручение оси стержня определим по известной формуле [49] с использованием первых, вторых и третьих производных координат оси стержня по времени:

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} {}_{\mathbf{Y}}r_1' & {}_{\mathbf{Y}}r_2' & {}_{\mathbf{Y}}r_3' \\ {}_{\mathbf{Y}}r_1'' & {}_{\mathbf{Y}}r_2'' & {}_{\mathbf{Y}}r_3'' \\ {}_{\mathbf{Y}}r_1''' & {}_{\mathbf{Y}}r_2''' & {}_{\mathbf{Y}}r_3''' \end{vmatrix}}{\kappa^2 \cdot ({}_{\mathbf{Y}}r_1'^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_2'^2 + {}_{\mathbf{Y}}r_3'^2)^3}. \tag{8.36}$$

Подставляя в эту формулу выражения для компонентов соответствующих кватернионов из формул (8.29), (8.32) и (8.33), получим:

$$\tau = \frac{1}{v} \cdot \left({}_{\mathbf{Y}}\omega_3 + \frac{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_2' - {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \cdot {}_{\mathbf{Y}}\omega_1'}{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1^2 + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2^2} \right). \tag{8.37}$$

Несколько неожиданным является тот факт, что кручение оси стержня зависит не только от скорости поворота сечения вокруг оси ω_3, но и от угловых ускорений ω'_1, ω'_2. Напомним, что ось стержня представляет собой плоскую кривую только в том случае, когда на всей длине стержня $\tau = 0$.

Запишем теперь значения направляющих косинусов касательной, нормали и бинормали для оси стержня в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$.

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \dfrac{{}_{\mathbf{Y}}\omega_2}{\sqrt{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1^2 + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2^2}} \\ -\dfrac{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1}{\sqrt{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1^2 + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2^2}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \dfrac{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1}{\sqrt{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1^2 + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2^2}} \\ \dfrac{{}_{\mathbf{Y}}\omega_2}{\sqrt{{}_{\mathbf{Y}}\omega_1^2 + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2^2}} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.38}$$

8.7. Примитивы

Будем называть примитивами криволинейные стержни, для которых бикватернион скоростей ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)$ в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$ является константой. Исследуем для этого частного случая вопрос о форме стержня.

8.7.1. Общее решение для примитивов

Для случая, когда бикватернион скоростей ${}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega}(t)$ в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$ является константой, общее решение системы кинематических дифференциальных уравнений (8.21) можно записать в замкнутом виде:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0} \circ \exp \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega} \cdot t}{2}. \tag{8.39}$$

Такая возможность вытекает из формулы (2.334), если к ней применить принцип перенесения Котельникова-Штуди. Бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t)$ определяет положение вспомогательной системы координат (см. раздел 8.5) как функцию параметра t, а произвольная бикватернионная константа ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0}$ – положение этой системы при $t = 0$.

Будем считать исходными данными компоненты бикватерниона $\mathbf{\Omega}$ в подвижной системе координат:

$$ {}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_0 + \varpi \cdot v \\ \omega_1 + \varpi \cdot 0 \\ \omega_2 + \varpi \cdot 0 \\ \omega_3 + \varpi \cdot v \end{bmatrix}, \tag{8.40} $$

выписанные с учетом формулы (8.19). Здесь ω_0 – угловая скорость поворота сечения относительно оси y_3; ω_1, ω_2, ω_3 – компоненты вектора угловой скорости сечения; v – линейная скорость (абсолютная величина) перемещения базовой точки сечения, заданные в подвижной системе координат $\mathbf{Y}(t)$.

Рассмотрим подробнее частный случай, когда ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda 0} = \mathbf{I}$, поскольку переход к общему случаю легко выполняется по формуле сложения конечных перемещений. Тогда

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{F} = \exp \frac{{}_{\mathbf{Y}(t)}\mathbf{\Omega} \cdot t}{2}. \tag{8.41} $$

Обращаясь к приложению 9.5, где приведены формулы для аналитических функций бикватернионного аргумента, запишем следующие зависимости:

$$ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_0 \\ e_1 \cdot f_\bullet \\ e_2 \cdot f_\bullet \\ e_3 \cdot f_\bullet \end{bmatrix} + \varpi \cdot \begin{bmatrix} f^\circ{}_0 \\ e^\circ{}_1 \cdot f_\bullet + e_1 \cdot f^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_2 \cdot f_\bullet + e_2 \cdot f^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_3 \cdot f_\bullet + e_3 \cdot f^\circ{}_\bullet \end{bmatrix}, \tag{8.42} $$

где обозначено:

$$ \omega_\bullet = \pm\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2};\; e_j = \frac{\omega_j}{\omega_\bullet}\,(j = 1,2,3);\; e^\circ{}_j = -\frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3 \cdot \omega_j}{\omega_\bullet{}^2}\,(j = 1,2);\; e^\circ{}_3 = \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_\bullet{}^2}; \tag{8.43} $$

$$ f_0 = \exp \frac{\omega_0 \cdot t}{2} \cdot \cos \frac{\omega_\bullet \cdot t}{2};\quad f^\circ{}_0 = \frac{v \cdot t}{2} \cdot \exp \frac{\omega_0 \cdot t}{2} \cdot \left(\cos \frac{\omega_\bullet \cdot t}{2} - \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot \sin \frac{\omega_\bullet \cdot t}{2} \right); \tag{8.44} $$

$$ f_\bullet = \exp \frac{\omega_0 \cdot t}{2} \cdot \sin \frac{\omega_\bullet \cdot t}{2};\quad f^\circ{}_\bullet = \frac{v \cdot t}{2} \cdot \exp \frac{\omega_0 \cdot t}{2} \cdot \left(\sin \frac{\omega_\bullet \cdot t}{2} + \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot \cos \frac{\omega_\bullet \cdot t}{2} \right). \tag{8.45} $$

Формулы (8.43) определяют ось винта, по закону которого перемещается вспомогательная система координат. Плюккеровы координаты этой оси в подвижной системе координат

$$ E_j = e_j + \varpi \cdot e^\circ{}_j \quad (j = 1,2,3). \tag{8.46} $$

Как следует из формул (8.43), направление этой оси совпадает с направлением векторной части кватерниона $\boldsymbol{\omega}$, а расстояние ее от начала координат, то есть радиус цилиндрической поверхности, по которой перемещается базовая точка сечения стержня, равен:

$$R = \sqrt{e^{\circ 2}_{1} + e^{\circ 2}_{2} + e^{\circ 2}_{3}} = \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_\bullet}. \tag{8.47}$$

Параметр рассматриваемого винта определяется формулой:

$$P = \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_\bullet}. \tag{8.48}$$

Уравнение оси стержня в неподвижной системе координат определяется кватернионом радиуса-вектора ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}$, соединяющего начало неподвижной системы координат с началом подвижной системы. Этот кватернион представлен первой из формул (4.178), которая в развернутом виде выглядит так:

$$\begin{aligned}
{}_{\mathrm{X}}r_0(t) &= v \cdot t;\\
{}_{\mathrm{X}}r_1(t) &= \frac{\omega_1}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot v \cdot t - \frac{\omega_1}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \sin(\omega_\bullet \cdot t) + \frac{\omega_2}{\omega_\bullet} \cdot \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \left[1 - \cos(\omega_\bullet \cdot t)\right];\\
{}_{\mathrm{X}}r_2(t) &= \frac{\omega_2}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot v \cdot t - \frac{\omega_2}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \sin(\omega_\bullet \cdot t) - \frac{\omega_1}{\omega_\bullet} \cdot \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \left[1 - \cos(\omega_\bullet \cdot t)\right];\\
{}_{\mathrm{X}}r_3(t) &= \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_\bullet} \cdot v \cdot t + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_\bullet^{\,2}} \cdot \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \sin(\omega_\bullet \cdot t).
\end{aligned} \tag{8.49}$$

Нулевой компонент этого кватерниона оказывается равным дуговой координате сечения, соответствующего параметру t, а остальные три – это координаты радиуса-вектора ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{r}(t)$ в неподвижной системе координат. Следует отметить, что для рассматриваемого нами частного случая ${}_{\mathrm{X}}\mathbf{\Lambda 0} = \mathbf{I}$ неподвижная система координат совпадает с подвижной системой координат $\mathbf{Y}(t)$ при $t = 0$. Рис. 8.4 иллюстрирует приведенные выше формулы. Ось простейшего криволинейного стержня (примитива) представляет собой винтовую линию, расположенную на боковой поверхности цилиндра радиуса R, ось которого коллинеарна вектору угловой скорости и определяется единичным винтом (8.46). Тип винтовой линии определяется параметром винта (8.48). Если этот параметр положителен, ось примитива представляет собой правую винтовую линию (как штопор для извлечения пробок). Если параметр отрицательный, ось примитива представляет собой левую винтовую линию. Если параметр равен нулю, ось примитива представляет собой окружность. Шаг винтовой линии вычисляется по формуле:

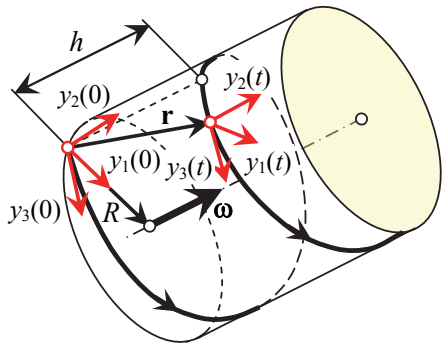


Рис. 8.4. Ось примитива

$$h = 2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{\omega_\bullet} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_\bullet}. \tag{8.50}$$

Шаг этот положителен для правой винтовой линии и отрицателен – для левой.

Напомним, что половинный экспоненциальный бикватернион ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{F}$ определяет положение не поперечного сечения стержня, а вспомогательной подвижной системы координат. Для перехода к подвижной системе координат ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}(t)$, связанной с сечением, надо дополнительно повернуть его на угол $\omega_0 \cdot t$, поскольку этот угол в случае примитивов изменяется с постоянной угловой скоростью ω_0. Подробнее об этом сказано в разделе 8.4.

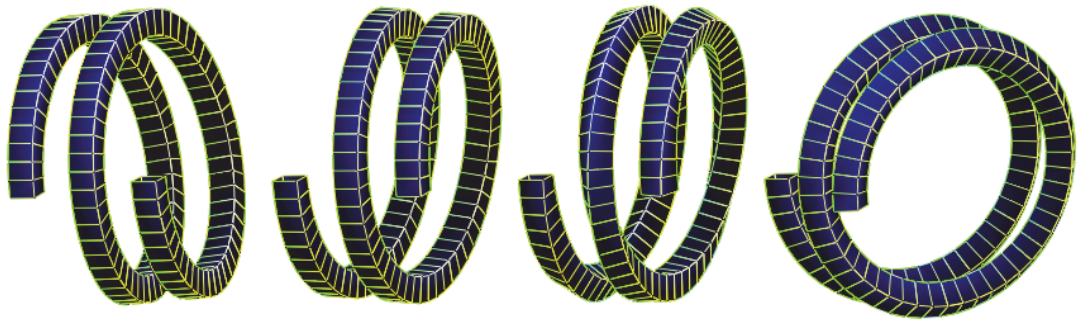
В соответствии с формулой (8.17), половинная экспонента бикватерниона ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(t)$, определяющего положение сечения стержня в неподвижной системе координат, имеет вид:

$$ {}_{\mathbf{X}}\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} {}_{\mathbf{X}}\Lambda_0(t)\cdot\cos\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} - {}_{\mathbf{X}}\Lambda_3(t)\cdot\sin\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} \\ {}_{\mathbf{X}}\Lambda_1(t)\cdot\cos\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} + {}_{\mathbf{X}}\Lambda_2(t)\cdot\sin\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} \\ {}_{\mathbf{X}}\Lambda_2(t)\cdot\cos\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} - {}_{\mathbf{X}}\Lambda_1(t)\cdot\sin\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} \\ {}_{\mathbf{X}}\Lambda_3(t)\cdot\cos\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} + {}_{\mathbf{X}}\Lambda_0(t)\cdot\sin\dfrac{\omega_0\cdot t}{2} \end{pmatrix}. \qquad (8.51) $$

В результате оказывается, что форма примитива определяется пятью постоянными числами: v, ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, причем v играет роль масштабного коэффициента. То есть, по существу, эта форма определяется одним кватернионом $\boldsymbol{\omega}$ с компонентами ω_0, ω_1, ω_2, ω_3.

8.7.2. Примеры примитивов

Итак, ось примитива представляет собой винтовую линию. Ориентация сечения относительно оси определяется компонентом ω_0.



a) *b*) *c*) *d*)

Рис. 8.5. Стержни с осью в виде винтовой линии: *a*) – левый винт; *b*) – правый винт; *c*) – с дополнительным кручением; *d*) – с кривизной в двух направлениях

На рис. 8.5 показаны криволинейные стержни квадратного поперечного сечения. Все они построены для линейной скорости передвижения сечения вдоль оси стержня $v = 1$ м/с. Начало оси стержня соответствует сечению, от которого стержень опуска-

ется вертикально вниз. Кватернионы угловых скоростей для каждого примера приведены в формулах (8.52). Здесь и далее размерность угловых скоростей рад/с.

$$\boldsymbol{\omega}_a = \left[0, -\frac{1}{25}, \frac{1}{2}, 0\right]; \boldsymbol{\omega}_b = \left[0, \frac{1}{25}, \frac{1}{2}, 0\right]; \boldsymbol{\omega}_c = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{2}, 0\right]; \boldsymbol{\omega}_d = \left[0, \frac{1}{25}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}\right]. \quad (8.52)$$

Любая упорядоченная четверка чисел (с номерами 0, 1, 2, 3), истолкованная как кватернион угловых скоростей, определяет примитивный криволинейный стержень.

Компонент с номером 3 характеризует кручение оси стержня. Если этот компонент положительный, то ось стержня представляет собой правый винт (рис. 8.5 *b*, *c*, *d*), если отрицательный – левый винт (рис. 8.5 *a*). Компонент с номером 1 характеризует искривление оси стержня в одном из направлений. В самолетной аналогии – это искривление траектории полета самолета, вызванное использованием рулей высоты. Положительный знак этого компонента соответствует задиранию носа самолета вверх (все варианты рис. 8.5), отрицательный знак – опусканию носа самолета вниз. Компонент с номером 2 характеризует искривление оси стержня в другом направлении. В самолетной аналогии – это искривление траектории полета самолета, вызванное его поворотом вправо или влево. Положительный знак этого компонента соответствует повороту вправо, отрицательный знак – повороту влево. В чистом виде такой случай на рис. 8.5 не представлен, однако на рис. 8.5 *d* реализована кривая, соответствующая одновременному подъему самолета вверх и его повороту направо. Компонент с номером 0 на форму оси стержня не влияет, а определяет ориентацию поперечного сечения стержня относительно этой оси. В самолетной аналогии поперечное сечение стержня как бы соединено с пропеллером. Положительный знак компонента с номером 0 соответствует вращению пропеллера по часовой стрелке с точки зрения пилота самолета. На рис. 8.5 *c* этот случай реализован.

Пользуясь идеей Мебиуса, можно создать целую гамму скрученных стержней. На рис. 8.6 показаны примеры кольцевых стержней квадратного сечения, скрученных по-разному. Кватернионы угловых скоростей для каждого примера приведены в формулах (8.53).

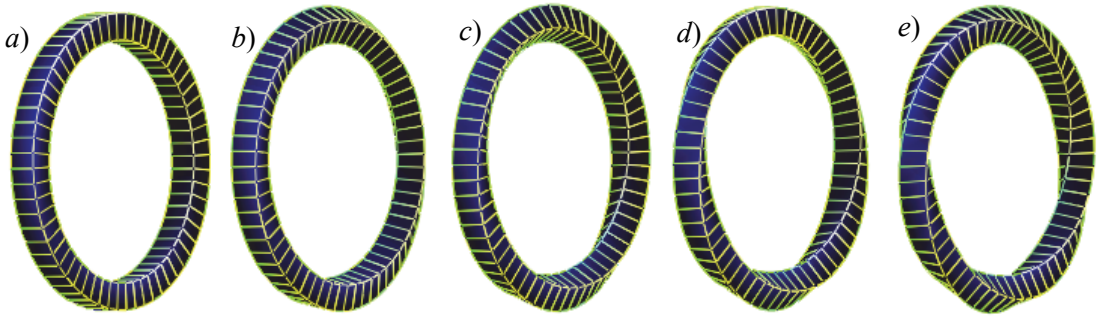


Рис. 8.6. Кольцевые скрученные стержни квадратного сечения

$$\boldsymbol{\omega}_a = \left[0, 0, \frac{1}{2}, 0\right]; \boldsymbol{\omega}_b = \left[\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{2}, 0\right]; \boldsymbol{\omega}_c = \left[\frac{2}{8}, 0, \frac{1}{2}, 0\right]; \boldsymbol{\omega}_d = \left[\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{2}, 0\right]; \boldsymbol{\omega}_e = \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right]. \quad (8.53)$$

8.8. Стержни с осью периодической формы

Подобно тому, как постоянный кватернион **ω** порождает примитив, переменный кватернион **ω**(*t*), являющийся функцией времени, порождает криволинейный стержень более сложного вида. Целый класс криволинейных стержней можно создать с использованием периодических функций. На рис. 8.7 приведены примеры плоских криволинейных стержней с использованием периодических функций. Кватернионы угловых скоростей для каждого примера приведены в формулах (8.54).

$$\boldsymbol{\omega}_a = [0;0;0;1,4\cdot\cos t];\boldsymbol{\omega}_b = [0;0;0;1,6\cdot\cos t];\boldsymbol{\omega}_c = [0;0;0;,8\cdot\cos t];\boldsymbol{\omega}_d = [0;0;0;2\cdot\cos t]. \quad (8.54)$$

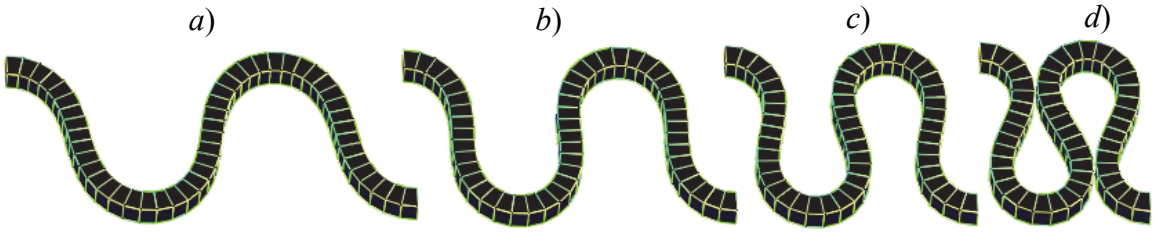


Рис. 8.7. Плоские криволинейные стержни с использованием периодических функций

Из рисунка видно, как сжимаются зигзаги оси стержня при увеличении коэффициента при периодической функции cos *t*. Представляя компоненты кватерниона угловых скоростей периодическими функциями, можно образовать различные виды криволинейных стержней. На рис. 8.8 приведены примеры таких стержней. Кватернионы угловых скоростей для этих примеров приведены в формулах (8.55).

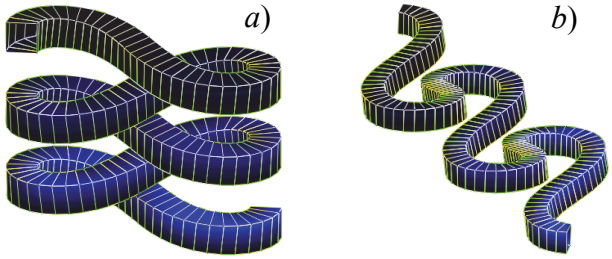


Рис. 8.8. Пространственные криволинейные стержни: пандусы и серпантины

$$\boldsymbol{\omega}_a = [0,\ 0.3\cdot\operatorname{sign}(\cos t),\ 0,\ 2.4\cdot\cos t]; \quad \boldsymbol{\omega}_b = [0,\ 0.3\cdot\cos t,\ 0,\ 2.1\cdot\cos t]. \quad (8.55)$$

8.9. Стержни с осью, лежащей на поверхности сферы

Как уже упоминалось, каждой функциональной зависимости кватерниона **ω** от скалярного аргумента *t* соответствует криволинейный стержень. Если в кватернионе **ω** задать $\omega_1 = v/R$; $\omega_3 = 0$, то ось стержня будет лежать на сфере радиуса *R*. Форма этого стержня определится компонентами ω_0 и ω_2. Примеры таких стержней приведены на рис. 8.9. Кватернионы угловых скоростей для этих примеров приведены в формулах (8.56).

$$\boldsymbol{\omega}_a = [0,\ 0.2,\ 1.2\cdot\sin(0.692\cdot t)+0.05,\ 0]; \quad \boldsymbol{\omega}_b = [0,\ 0.2,\ 1.2\cdot\sin(0.692\cdot t),\ 0]. \quad (8.56)$$

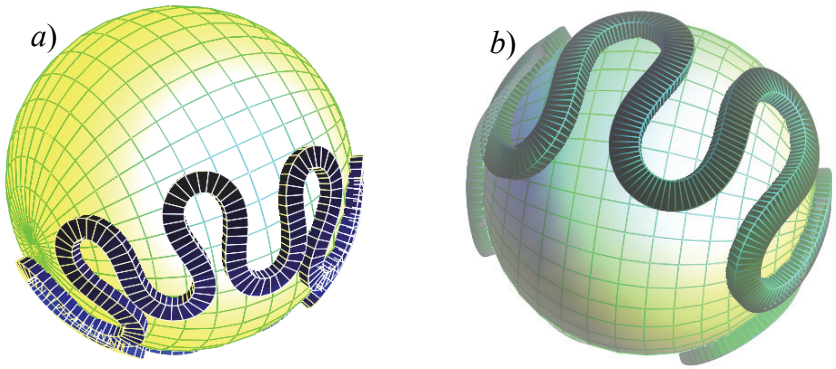


Рис. 8.9. Стержни с осью, лежащей на поверхности сферы

8.10. Стержни экзотической формы

Предложенная методика позволяет строить стержни весьма необычной формы. Комбинируя различные функции для кватерниона ω, можно построить стержень практически любого вида. При этом можно применять кусочно-постоянные или кусочно-линейные функции. Примеры таких стержней показаны на рис. 8.10.

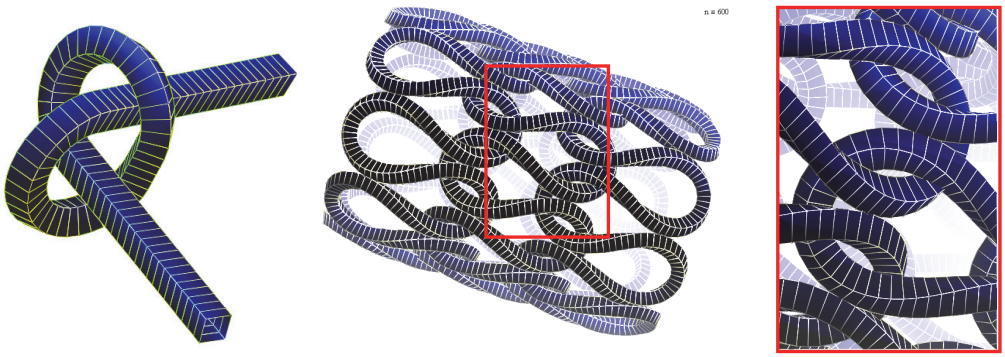


Рис. 8.10. Стержни экзотической формы

8.11. Тонкостенные стержни из листовых заготовок

Будем условно полагать, что исходным материалом для изготовления тонкостенных стержней является стальной лист. Криволинейные стержни проще всего изготавливать из заготовок (рис. 8.11), выкраивая их из плоского листа, искривляя и соединяя между собой продольными швами. Почти все примеры, приведенные выше, представляют собой стержни такого типа. Прежде чем соединить между собой заготовки, им надо придать криволинейную форму. Будем считать, что нам очень повезло, если нужную форму удается получить только за счет изгибания листовых заготовок. При этом срединная поверхность не испытывает растяжений, сжатий или перекосов. В

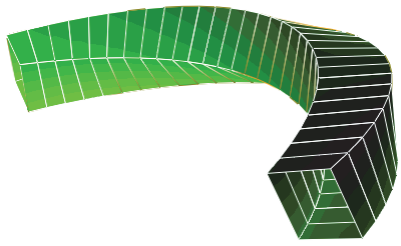


Рис. 8.11. Тонкостенный стержень из листовых заготовок

общем же случае листовую заготовку надо не только изгибать, но и скручивать. Это невозможно сделать без деформации срединной поверхности заготовки, поскольку эта поверхность при скручивании полосы деформируется.

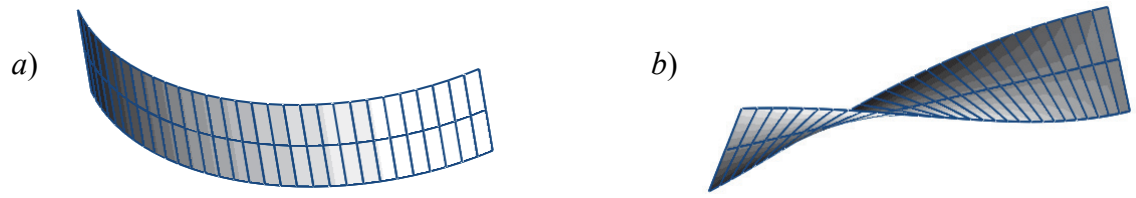


Рис. 8.12. Деформация прямолинейной заготовки: *a* – изгибанием; *b* – скручиванием

На рис. 8.12 показаны два вида деформации прямолинейной плоской заготовки. Вид *a* соответствует изгибанию, когда прямолинейная полоса приобретает цилиндрическую форму. Вид *b* соответствует скручиванию полосы. Из рисунка видно, что в этом случае продольные волокна по краям полосы длиннее, чем в ее середине.

8.11.1. Общий случай

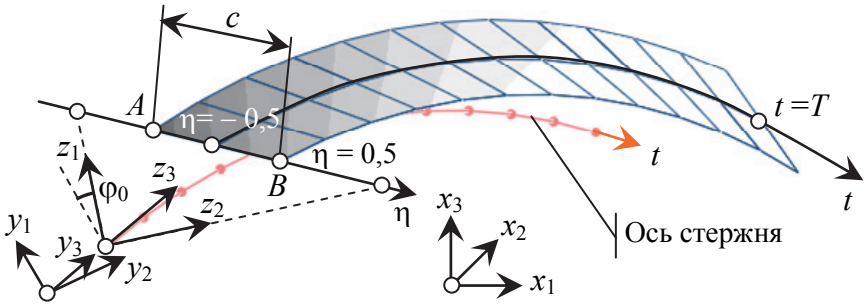


Рис. 8.13. Геометрия одной из граней тонкостенного стержня

Для того, чтобы разобраться в том, когда мы имеем дело с чистым изгибом, а когда со скручиванием полосы обратимся к дифференциальной геометрии [49], которая изучает проблему изгибания поверхностей, и рассмотрим более подробно одну из граней тонкостенного стержня (рис. 8.13).

Грань представляет собой криволинейную полосу, которую можно считать следом от движения ориентированного отрезка прямой, жестко связанного с подвижной системой координат z_1, z_2, z_3 и лежащего в координатной плоскости z_1, z_2. Будем полагать, что отрезок задан параметрически с использованием безразмерного параметра η, который меняется в пределах $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. Координаты начала этого отрезка, обозначенного на рисунке буквой A, $z_3 = 0$; $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, а координаты его конца, обозначенного на рисунке буквой B, $z_3 = 0$; $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2$. Координаты произвольной точки этого отрезка в зависимости от значения параметра η могут быть вычислены по формулам:

$$z_3 = 0; \quad z_1 = a_1 + (b_1 - a_1)\cdot\eta; \quad z_2 = a_2 + (b_2 - a_2)\cdot\eta\,. \tag{8.57}$$

Легко сообразить, что ширина рассматриваемой грани в сечении, нормальном оси стержня, равна длине этого отрезка

$$c = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\ . \tag{8.58}$$

Рассмотрим еще одну декартову систему координат u_1, u_2, u_3 (рис. 8.14). Эта система координат связана с рассматриваемой гранью тонкостенного стержня. Ось u_3 направлена вдоль оси стержня и совпадает с осью z_3. Ось u_2 направлена параллельно отрезку, образующему грань стержня, в сторону увеличения параметра η. Ось u_1, образует с осями u_2 и u_3 правую тройку.

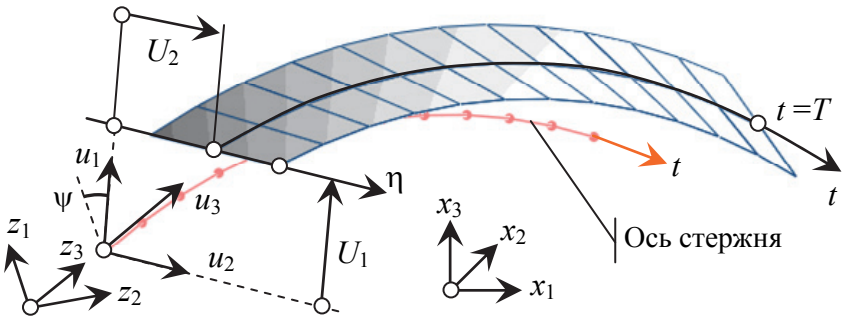


Рис. 8.14. Введение координатной системы u_1, u_2, u_3

Система координат u_1, u_2, u_3 по отношению к системе координат z_1, z_2, z_3 повернута на угол ψ вокруг оси z_3, а по отношению к системе координат y_1, y_2, y_3 на угол $\ln \|\mathbf{q}\| + \psi$ вокруг оси y_3. Из геометрических соображений вытекает:

$$\cos\psi = \frac{b_2 - a_2}{c}; \quad \sin\psi = -\frac{b_1 - a_1}{c}\ . \tag{8.59}$$

Угловые скорости в этой системе координат через компоненты кватерниона ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}$ выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbf{U}}\omega_0 = {}_{\mathbf{Y}}\omega_0; \quad {}_{\mathbf{U}}\omega_3 = {}_{\mathbf{Y}}\omega_3;\\
&{}_{\mathbf{U}}\omega_1 = {}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \cdot \cos(\ln\|\mathbf{q}\| + \psi) + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \cdot \sin(\ln\|\mathbf{q}\| + \psi);\\
&{}_{\mathbf{U}}\omega_2 = -{}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \cdot \sin(\ln\|\mathbf{q}\| + \psi) + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \cdot \cos(\ln\|\mathbf{q}\| + \psi).
\end{aligned} \tag{8.60}$$

Раскрывая две последние зависимости (8.60) с использованием формул (8.59), получим:

$${}_{\mathbf{U}}\omega_1 = \left({}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c} - {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \cdot \frac{b_1 - a_1}{c}\right) \cdot \cos\ln\|\mathbf{q}\| + \left({}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \cdot \frac{b_1 - a_1}{c} + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c}\right) \cdot \sin\ln\|\mathbf{q}\|; \tag{8.61}$$

$${}_{\mathbf{U}}\omega_2 = -\left({}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c} + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \cdot \frac{b_1 - a_1}{c}\right) \cdot \sin\ln\|\mathbf{q}\| + \left({}_{\mathbf{Y}}\omega_1 \cdot \frac{b_1 - a_1}{c} + {}_{\mathbf{Y}}\omega_2 \cdot \frac{b_2 - a_2}{c}\right) \cdot \cos\ln\|\mathbf{q}\|. \tag{8.62}$$

Координаты середины отрезка, образующего грань, в системе координат u_1, u_2, u_3 таковы:

$$U_1 = a_1 \cdot \cos\psi + a_2 \cdot \sin\psi = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{c};$$
$$U_2 = -a_1 \cdot \sin\psi + a_2 \cdot \cos\psi = \frac{b_1^2 - a_1^2 + b_2^2 - a_2^2}{2 \cdot c}. \tag{8.63}$$

Координаты произвольной точки отрезка, образующего грань, в системе координат u_1, u_2, u_3 в зависимости от значения параметра η могут быть вычислены по формулам:

$$u_3 = 0; \quad u_1 = U_1; \quad u_2 = U_2 + c \cdot \eta. \tag{8.64}$$

Из чисто геометрических соображений запишем уравнение поверхности рассматриваемой грани стержня, заданное параметрически с использованием параметров t и η, в неподвижной системе координат x_1, x_2, x_3:

$${}_{\mathbf{X}}\mathbf{X}(t,\eta) = {}_{\mathbf{X}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}(t) \circ \mathbf{Cu}(t) \circ {}_{\mathbf{U}}\mathbf{U}(\eta) \circ \mathbf{Cu}^{-1}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t) \quad (0 \le t \le T); (0 \le \eta \le 1), \tag{8.65}$$

где ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{X}(t,\eta)$ – кватернион, содержащий в своей векторной части координаты текущей точки поверхности грани в неподвижной системе координат;

${}_{\mathbf{X}}\mathbf{x}(t)$ – кватернион, содержащий в своей векторной части координаты точки на оси стержня, соответствующей моменту времени t;

${}_{\mathbf{U}}\mathbf{U}(\eta)$ – кватернион, содержащий в своей векторной части координаты точки на рассматриваемой грани сечения, вычисляемые по формуле (8.57):

$${}_{\mathbf{U}}\mathbf{U}(\eta) = \left[0; \quad U_1; \quad U_2 + c \cdot \eta; \quad 0\right]; \tag{8.66}$$

$\mathbf{Cu}(t)$ – кватернион перехода от координатной системы u_1, u_2, u_3 к системе y_1, y_2, y_3, имеющий вид:

$$\mathbf{Cu}(t) = \left[\cos\frac{\varphi_0(t) + \psi}{2}; 0; 0; \sin\frac{\varphi_0(t) + \psi}{2}\right]. \tag{8.67}$$

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности, считая известными $v(t)$, $\mathbf{q}(t)$ и ${}_{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}(t)$. Запишем некоторые вспомогательные формулы.

$$\frac{d\,{}_{\mathbf{U}}\mathbf{U}(\eta)}{d\eta} = \left[0; \quad 0; \quad c; \quad 0\right]. \tag{8.68}$$

В соответствии с формулой перехода от кватерниона $\mathbf{q}(t)$ к кватерниону $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (2.239) и с учетом формулы (9.13), запишем:

$$\varphi_0(t) = 2 \cdot \ln\left|\mathbf{q}(t)\right| = \ln\left\|\mathbf{q}(t)\right\|. \tag{8.69}$$

Производная этой функции по времени выражается формулой:

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = 2 \cdot \left[\frac{q_0(t)}{\left\|\mathbf{q}(t)\right\|} \cdot \frac{dq_0(t)}{dt} + \frac{q_1(t)}{\left\|\mathbf{q}(t)\right\|} \cdot \frac{dq_1(t)}{dt} + \frac{q_2(t)}{\left\|\mathbf{q}(t)\right\|} \cdot \frac{dq_2(t)}{dt} + \frac{q_3(t)}{\left\|\mathbf{q}(t)\right\|} \cdot \frac{dq_3(t)}{dt}\right]. \tag{8.70}$$

Нетрудно проверить, что этой формуле можно придать вид:

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = 2 \cdot \mathrm{Scal}\left[\mathbf{q}(t)^{-1} \circ \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \right], \tag{8.71}$$

откуда следует:

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = \frac{2 \cdot d \ln|\mathbf{q}(t)|}{dt} = \frac{d \ln\|\mathbf{q}(t)\|}{dt} = {}_{\mathrm{y}}\omega_0(t). \tag{8.72}$$

Используя это равенство, можно получить формулу для производной кватерниона $\mathbf{Cu}(t)$ по параметру t:

$$\frac{d\mathbf{Cu}(t)}{dt} = \frac{{}_{\mathrm{y}}\omega_0(t)}{2} \cdot \left[-\sin\frac{\varphi_0(t)+\psi}{2}; 0; 0; \cos\frac{\varphi_0(t)+\psi}{2} \right]. \tag{8.73}$$

Выражая $\varphi_0(t)$ через кватернион $\mathbf{q}(t)$ по формуле (8.69), запишем:

$$\mathbf{Cu}(t) = \left[\cos\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2}; 0; 0; \sin\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2} \right]; \tag{8.74}$$

$$\frac{d\mathbf{Cu}(t)}{dt} = \frac{{}_{\mathrm{y}}\omega_0(t)}{2} \cdot \left[-\sin\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2}; 0; 0; \cos\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2} \right]. \tag{8.75}$$

Для кватерниона, обратного $\mathbf{Cu}(t)$, запишем следующие выражения:

$$\mathbf{Cu}^{-1}(t) = \left[\cos\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2}; 0; 0; -\sin\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2} \right]; \tag{8.76}$$

$$\frac{d\mathbf{Cu}^{-1}(t)}{dt} = -\frac{{}_{\mathrm{y}}\omega_0(t)}{2} \cdot \left[\sin\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2}; 0; 0; \cos\frac{\ln\|\mathbf{q}(t)\|+\psi}{2} \right]. \tag{8.77}$$

Полезно иметь перед глазами и следующие формулы:

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(t) \circ {}_{\mathrm{y}}\boldsymbol{\omega}(t); \quad \frac{d\mathbf{q}^{-1}(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot {}_{\mathrm{y}}\boldsymbol{\omega}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t). \tag{8.78}$$

Первая из них повторяет кинематическое дифференциальное уравнение, которое обязано удовлетворяться, а вторая использует, кроме этого уравнения, формулу (2.105).

Аккуратно продифференцировав (8.65) по t и по η, получим:

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{X}}\left[\frac{\partial_{\mathrm{x}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial t} \right] &= \mathbf{q}(t) \circ \mathbf{Cu}(t) \circ {}_{\mathrm{U}}\left[\frac{\partial_{\mathrm{x}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial t} \right] \circ \mathbf{Cu}^{-1}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t); \\ {}_{\mathrm{X}}\left[\frac{\partial_{\mathrm{x}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial \eta} \right] &= \mathbf{q}(t) \circ \mathbf{Cu}(t) \circ {}_{\mathrm{U}}\left[\frac{\partial_{\mathrm{x}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial \eta} \right] \circ \mathbf{Cu}^{-1}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t), \end{aligned} \tag{8.79}$$

где обозначено:

$$ {}_{\mathbf{U}}\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial t}\right]=\begin{bmatrix} v(t) \\ -(U_2+c\cdot\eta)\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right] \\ U_1\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right] \\ v(t)+(U_2+c\cdot\eta)\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_1(t)-U_1\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_2(t) \end{bmatrix}; \quad {}_{\mathbf{U}}\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial\eta}\right]=[0,0,c,0]. \tag{8.80} $$

Из структуры формул (8.79) следует, что ${}_{\mathbf{U}}\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial t}\right]$ и ${}_{\mathbf{U}}\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{X}(t,\eta)}{\partial\eta}\right]$ представляют собой искомые производные функции ${}_{\mathbf{X}}\mathbf{X}(t,\eta)$ по t и по η в подвижной системе координат u_1, u_2, u_3. Воспользовавшись этой системой координат, вычислим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности грани по формулам:

$$ \begin{gathered} E(t,\eta)=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}X_i(t,\eta)}{\partial t}\right]^2; \\ F(t,\eta)=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}X_i(t,\eta)}{\partial t}\right]\cdot\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}X_i(t,\eta)}{\partial\eta}\right]; G(t,\eta)=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial_{\mathbf{X}}X_i(t,\eta)}{\partial\eta}\right]^2. \end{gathered} \tag{8.81} $$

В результате получим:

$$ \begin{aligned} E(t,\eta)=&\left[U_1^2+(U_2+c\cdot\eta)^2\right]\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right]^2+ \\ &+\left[v(t)+(U_2+c\cdot\eta)\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_1(t)-U_2\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_2(t)\right]^2; \end{aligned} \tag{8.82} $$

$$ F(t)=c\cdot U_1\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right]; \quad G=c^2. \tag{8.83} $$

Квадрат элемента дуги при помощи этих коэффициентов может быть выражен так:

$$ ds^2=E(t,\eta)\cdot dt^2+2\cdot F(t)\cdot dt\cdot d\eta+G\cdot d\eta^2. \tag{8.84} $$

Элемент площади поверхности выражается формулой:

$$ dS=\sqrt{E(t,\eta)\cdot G-F^2(t)}\cdot dt\cdot d\eta. \tag{8.85} $$

При этом,

$$ E(t,\eta)\cdot G-F^2(t)=c^2\cdot\begin{Bmatrix} (U_2+c\cdot\eta)^2\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right]^2+ \\ +\left[v(t)+(U_2+c\cdot\eta)\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_1(t)-U_1\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_2(t)\right]^2 \end{Bmatrix}. \tag{8.86} $$

В теории оболочек взамен коэффициентов первой квадратичной формы E, F, G часто применяются так называемые параметры Лямэ A_1, A_2 и угол между положительными направлениями координатных линий χ. Эти величины можно вычислить по формулам:

$$ A_1=\sqrt{E};\quad A_2=\sqrt{G};\quad \cos\chi=\frac{F}{A_1\cdot A_2}. \tag{8.87} $$

Для рассматриваемого случая

$$A_1(t,\eta)=\sqrt{\left[U_1^2+(U_2+c\cdot\eta)^2\right]\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right]^2+\left[v(t)+(U_2+c\cdot\eta)\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_1(t)-U_1\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_2(t)\right]^2};\qquad(8.88)$$

$$A_2=c;\qquad(8.89)$$

$$\cos\chi(t,\eta)=\frac{U_1\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right]}{\sqrt{\left[U_1^2+(U_2+c\cdot\eta)^2\right]\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right]^2+\left[v(t)+(U_2+c\cdot\eta)\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_1(t)-U_1\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_2(t)\right]^2}}.\qquad(8.90)$$

Дифференциалы дуг координатных линий выражаются через параметры Лямэ так:

$$ds_1=A_1\cdot dt;\quad ds_2=A_2\cdot d\eta.\qquad(8.91)$$

Элемент площади поверхности выражается формулой:

$$dS=A_1\cdot A_2\cdot\sin\chi\cdot dt\cdot d\eta.\qquad(8.92)$$

Гауссову кривизну поверхности полосы через коэффициенты первой квадратичной формы и их первые и вторые производные [49] можно вычислить по формуле Brioschi:

$$K=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2E}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2F}{\partial t\cdot\partial\eta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2G}{\partial t^2} & \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial\eta}\\ \frac{\partial F}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial t} & E & F\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial\eta} & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial\eta} & \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial t}\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial\eta} & E & F\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial t} & F & G\end{vmatrix}}{(E\cdot G-F^2)^2}.\qquad(8.93)$$

С учетом того, что в нашем случае

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial G}{\partial\eta}=\frac{\partial^2G}{\partial t^2}=\frac{\partial F}{\partial\eta}=\frac{\partial^2F}{\partial t\cdot\partial\eta}=0,\qquad(8.94)$$

формула (8.93) упрощается:

$$K=\frac{1}{2\cdot(E\cdot G-F^2)}\cdot\left[\frac{G}{2\cdot(E\cdot G-F^2)}\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial\eta}\right)^2-\frac{\partial^2E}{\partial\eta^2}\right].\qquad(8.95)$$

Выражения для производных коэффициента E выглядят так:

$$\frac{\partial E(t,\eta)}{\partial\eta}=2\cdot c\cdot\left\{\begin{matrix}(U_2+c\cdot\eta)\cdot\left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t)+{}_{\mathbf{U}}\omega_3(t)\right]^2+\\ +{}_{\mathbf{U}}\omega_1(t)\cdot\left[v(t)+(U_2+c\cdot\eta)\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_1(t)-U_1\cdot{}_{\mathbf{U}}\omega_2(t)\right]\end{matrix}\right\};\qquad(8.96)$$

$$\frac{\partial^2 E(t,\eta)}{\partial \eta^2} = 2 \cdot c^2 \cdot \left\{ \left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t) + {}_{\mathbf{U}}\omega_3(t) \right]^2 + {}_{\mathbf{U}}\omega_1^2(t) \right\}. \tag{8.97}$$

По значению гауссовой кривизны K, вычисляемому для рассматриваемой полосы по формуле (8.95), можно узнать, развертывается ли на плоскость эта полоса. Если $K = 0$ во всех точках этой полосы $(0 \le t \le T; -0,5 \le \eta \le 0,5)$, полоса разворачивается на плоскость, в противном случае – нет.

8.11.2. Тонкостенные стержни с разворачиваемыми гранями

Рассмотрим частный случай криволинейного стержня, когда соблюдается равенство:

$$\omega_0(t) + \omega_3(t) = 0 . \tag{8.98}$$

Анализируя формулу (8.95), можно убедиться в том, что при соблюдении равенства (8.98) гауссова кривизна в любой точке полосы, входящей в состав стержня, будет равна нулю. Действительно, при соблюдении равенства (8.98):

$$E(t,\eta) \cdot G - F^2(t) = c^2 \cdot \left[v(t) + (U_2 + c \cdot \eta) \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1(t) - U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_2(t) \right]^2 ; \tag{8.99}$$

$$\frac{\partial E(t,\eta)}{\partial \eta} = 2 \cdot c \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1(t) \cdot \left[v(t) + (U_2 + c \cdot \eta) \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1(t) - U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_2(t) \right]; \tag{8.100}$$

$$\frac{\partial^2 E(t,\eta)}{\partial \eta^2} = 2 \cdot c^2 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1^2(t) . \tag{8.101}$$

Подставляя эти выражения в формулу (8.95), убеждаемся в том, что гауссова кривизна для произвольной полосы действительно равна нулю. Это означает, что все полосы такого криволинейного стержня можно получить из плоских листовых заготовок путем их изгибания.

Напомним, что форма оси стержня зависит от линейной скорости $v(t)$ и от компонентов векторной части кватерниона угловых скоростей ${}_{\mathbf{Y}}\omega_1(t)$, ${}_{\mathbf{Y}}\omega_2(t)$, ${}_{\mathbf{Y}}\omega_3(t)$. Эти четыре функции времени полностью определяют форму оси стержня. Скалярная часть кватерниона угловых скоростей ${}_{\mathbf{Y}}\omega_0(t)$ на форму оси стержня не влияет, и ею можно распоряжаться произвольно. Принимая

$$\omega_0(t) = -\omega_3(t) , \tag{8.102}$$

получим криволинейный стержень с выбранной заранее формой оси и разворачиваемыми на плоскость гранями. Это есть важная практическая рекомендация для формообразования криволинейных тонкостенных стержней.

8.11.3. Построение разверток

Рассмотрим, как можно развернуть на плоскость грань тонкостенного стержня. Как было указано выше, эта задача выполнима лишь для частного случая, описанного в предыдущем разделе. Однако, приближенно это можно выполнить и для общего случая. При этом понятно, что чем уже грань тонкостенного стержня, тем меньше надо деформировать срединную поверхность этой грани для того, чтобы ее распря-

мить и выложить на плоскость. Будем условно считать, что бесконечно узкая криволинейная полоска может быть развернута на плоскость без деформирования срединной поверхности.

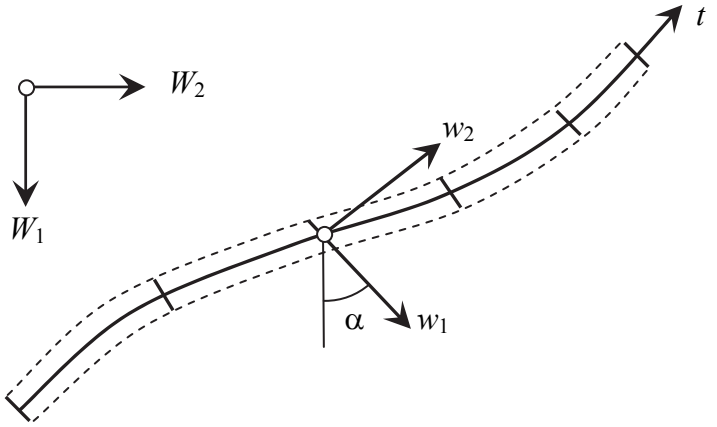


Рис. 8.15. Развертка на плоскость узкой криволинейной полоски

На плоскости развертки введем в рассмотрение две декартовы координатные системы (рис. 8.15): неподвижную W_1, W_2 и подвижную w_1, w_2, являющуюся функцией параметра t. Подвижная система связана с разворачиваемой полосой так, что ось w_1 направлена вдоль прямолинейной образующей с координатой η, а ось u_2 – перпендикулярно ей в сторону увеличения координаты t. Угол, на который повернута подвижная система относительно неподвижной (положительное направление – против часовой стрелки), обозначим α. Он также является функцией t. Связь между координатными системами выражается формулами:

$$W_1 = w_1 \cdot \cos\alpha - w_2 \cdot \sin\alpha; \quad W_2 = w_1 \cdot \sin\alpha + w_2 \cdot \cos\alpha\,. \tag{8.103}$$

Будем полагать, что, кроме этого, известны:

$v\alpha(t)$ – скорость изменения угла α;
$vw_1(t)$ – скорость изменения координаты w_1 в подвижной системе координат;
$vw_2(t)$ – скорость изменения координаты w_2 в подвижной системе координат.

Развертка полоски будет полностью определена, если для каждого значения параметра t будут известны координаты W_1, W_2 центральной линии развертки и угол α, на который повернута подвижная система координат относительно неподвижной. Запишем дифференциальные уравнения для этих переменных.

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = v\alpha(t);$$

$$\frac{dW_1(t)}{dt} = vw_1(t) \cdot \cos\alpha(t) - vw_2(t) \cdot \sin\alpha(t); \tag{8.104}$$

$$\frac{dW_2(t)}{dt} = vw_1(t) \cdot \sin\alpha(t) + vw_2(t) \cdot \cos\alpha(t).$$

Для полоски, находящейся в окрестности срединной линии рассматриваемой грани, можно записать формулы для скоростей изменения искомых переменных, пользуясь рис. 8.14:

$$\begin{aligned} v\alpha(t) &= {}_{\mathbf{U}}\omega_1(t); \\ vw_1(t) &= U_1 \cdot \left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t) + {}_{\mathbf{U}}\omega_3(t) \right]; \\ vw_2(t) &= v(t) + U_2 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1(t) - U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_2(t). \end{aligned} \tag{8.105}$$

При этом компоненты кватерниона ${}_{\mathbf{U}}\boldsymbol{\omega}(t)$ вычисляются по формулам (8.61).

Если задать начальные значения $\alpha(0)$, $W_1(0)$ и $W_2(0)$, можно будет проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8.104) по методу Рунге-Кутты и по найденным функциям $W_1(t)$, $W_2(t)$ построить центральную линию полоски. Угол $\alpha(t)$ позволяет сделать эту полоску двухмерной, добавив вторую координату η. В результате получим параметрическое представление полоски, развернутой на плоскости W_1, W_2.

$$W_1(t,\eta) = W_1(t) + c \cdot \eta \cdot \cos\alpha; \quad W_2(t,\eta) = W_2(t) + c \cdot \eta \cdot \sin\alpha\,. \tag{8.106}$$

Будем полагать, что параметр η изменяется в пределах $-\varepsilon < \eta < \varepsilon$, где ε – малая величина.

Опуская выкладки, приведем формулы для параметров Лямэ этой полоски:

$$Ap_1(t,\eta) = \sqrt{U_1^2 \cdot \left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t) + {}_{\mathbf{U}}\omega_3(t) \right]^2 + \left[v(t) + (U_2 + c \cdot \eta) \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1(t) - U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_2(t) \right]^2}; \tag{8.107}$$

$$Ap_2 = c; \tag{8.108}$$

$$\cos\chi p(t,\eta) = \frac{U_2 \cdot \left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t) + {}_{\mathbf{U}}\omega_3(t) \right]}{\sqrt{U_1^2 \cdot \left[{}_{\mathbf{U}}\omega_0(t) + {}_{\mathbf{U}}\omega_3(t) \right]^2 + \left[v(t) + (U_2 + c \cdot \eta) \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1(t) - U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_2(t) \right]^2}}. \tag{8.109}$$

Заметим, что в частном случае, когда выполняется формула (8.98), то есть, когда грань стержня развертываема, параметры Лямэ для полоски совпадают с параметрами Лямэ для грани криволинейного стержня. Таким образом, в этом случае при помощи системы дифференциальных уравнений (8.104) можно построить развертку всей грани стержня. При этом боковые линии развертки получаются при значениях $\eta = \pm 0{,}5$. Торцевые линии развертки получаются при $t = 0$ и $t = T$. Линиями гиба являются координатные линии $t = \text{const}$. Эти линии перпендикулярны срединной линии и боковым линиям развертки.

8.11.4. Изгибание скрученной полосы на поверхность катеноида

В том случае, когда полоса не может быть развернута на плоскость, она может быть выложена на некоторую криволинейную поверхность с плотным прилеганием к ней. Это свойство не только любопытно, но в отдельных случаях имеет практическое значение.

Рассмотрим полосу тонкостенного стержня, получающуюся как частный случай полосы из п. 8.11.1, при ${}_U\omega_1={}_U\omega_2={}_U\omega_3=U_1=U_2=0$ (рис. 8.16 а).

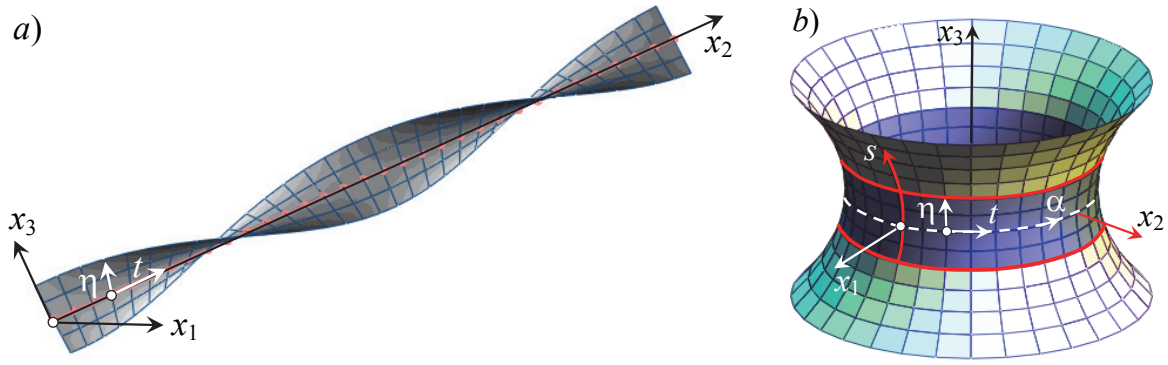


Рис. 8.16. Укладка скрученной полосы на поверхность катеноида

Будем полагать, $\omega_0(t)=\text{const}$, $v(t)=\text{const}$. В результате мы получим прямолинейную скрученную полосу, уравнение которой, записанное через параметры t и η, выглядит так:

$$x_1(t,\eta)=c\cdot\eta\cdot\sin(\omega_0\cdot t);\quad x_2(t)=v\cdot t;\quad x_3(t,\eta)=c\cdot\eta\cdot\cos(\omega_0\cdot t),\tag{8.110}$$

где c – ширина полосы, а η – безразмерный параметр, изменяющийся в пределах $-0{,}5\le\eta\le 0{,}5$. Коэффициенты первой квадратичной формы для этой поверхности, полученные как частный случай формул (8.82)–(8.83), таковы:

$$E(\eta)=v^2+(\omega_0\cdot c\cdot\eta)^2;\quad F=0;\quad G=c^2.\tag{8.111}$$

Длину полосы l выберем такой, чтобы поперечное сечение этой полосы (прямолинейный отрезок длиной c) совершало на этой длине один полный поворот. Это случится, если временной параметр t будет изменяться в пределах $0\le t\le T$, причем

$$T=2\cdot\pi/\omega_0.\tag{8.112}$$

Длина полосы окажется при этом равной

$$l=2\cdot\pi\cdot v/\omega_0.\tag{8.113}$$

Поверхность, форму которой имеет скрученная полоса, называется геликоидом. Эта поверхность относится к классу минимальных, то есть, ее площадь является минимальной среди всех поверхностей, натянутых на данный контур. Кстати, это единственная минимальная поверхность, имеющая прямолинейные образующие. Физической реализацией минимальной поверхности является мыльная пленка.

Покажем, что скрученная полоса укладывается на поверхности катеноида в виде пояса шириной c (по криволинейной образующей). Катеноид – это поверхность, образованная вращением цепной линии вокруг ее оси абсцисс (рис. 8.16 *b*). Уравнение катеноида в параметрическом виде выглядит следующим образом:

$$x_1(\alpha,s)=a\cdot\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}\cdot\cos\alpha;\quad x_2(\alpha,s)=a\cdot\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}\cdot\sin\alpha;\quad x_3(s)=a\cdot\operatorname{Arsh}\frac{s}{a},\qquad(8.114)$$

где α – угол, отсчитываемый вдоль экватора от оси x_1 в направлении оси x_2;

s – дуговая координата, отсчитываемая от экватора вдоль меридиана в направлении увеличения координаты x_3;

a – произвольная постоянная с размерностью длины.

Для решения нашей задачи надо перейти от параметров α, s к параметрам t, η и определить произвольную постоянную a. Для этого годятся зависимости:

$$\alpha=\omega_0\cdot t;\quad s=c\cdot\eta;\quad a=v/\omega_0.\qquad(8.115)$$

Если ввести обозначение:

$$\sigma=\omega_0\cdot c/v,\qquad(8.116)$$

уравнение катеноида в новых параметрах будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}x_1(t,\eta)&=\frac{v}{\omega_0}\cdot\sqrt{1+(\sigma\cdot\eta)^2}\cdot\cos(\omega_0\cdot t);\\ x_2(t,\eta)&=\frac{v}{\omega_0}\cdot\sqrt{1+(\sigma\cdot\eta)^2}\cdot\sin(\omega_0\cdot t);\\ x_3(t,\eta)&=\frac{v}{\omega_0}\cdot\operatorname{Arsh}(\sigma\cdot\eta).\end{aligned}\qquad(8.117)$$

Дифференцируя равенства (8.117) по t и по η, получим:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x_1(t,\eta)}{\partial t}=-v\cdot\sqrt{1+(\sigma\cdot\eta)^2}\cdot\sin(\omega_0\cdot t);\quad \frac{\partial x_1(t,\eta)}{\partial\eta}=\frac{c\cdot\sigma\cdot\eta}{\sqrt{1+(\sigma\cdot\eta)^2}}\cdot\cos(\omega_0\cdot t);\\ &\frac{\partial x_2(t,\eta)}{\partial t}=v\cdot\sqrt{1+(\sigma\cdot\eta)^2}\cdot\cos(\omega_0\cdot t);\quad \frac{\partial x_2(t,\eta)}{\partial\eta}=\frac{c\cdot\sigma\cdot\eta}{\sqrt{1+(\sigma\cdot\eta)^2}}\cdot\sin(\omega_0\cdot t);\\ &\frac{\partial x_3(t,\eta)}{\partial t}=0.\qquad\qquad\frac{\partial x_3(t,\eta)}{\partial\eta}=\frac{c}{\sqrt{1+(\sigma\cdot\eta)^2}}.\end{aligned}\qquad(8.118)$$

Пользуясь этими зависимостями, по формулам, подобным (8.81), вычислим коэффициенты первой квадратичной формы:

$$E(t,\eta)=v^2\cdot\left[1+(\sigma\cdot\eta)^2\right]=v^2+(\omega_0\cdot c\cdot\eta)^2;\quad F(t,\eta)=0;\quad G(t,\eta)=c^2.\qquad(8.119)$$

Сравнивая формулы (8.111) с формулами (8.119), замечаем, что коэффициенты первых квадратичных форм для обеих поверхностей совпадают. Таким образом, эти поверхности могут быть совмещены путем изгибания.

8.11.5. Изгибание криволинейной полосы на поверхность вращения

Рассмотрим частный случай криволинейного стержня, для которого $\omega_0 = 0$; а v, ω_1, ω_2, ω_3 – константы. Такие стержни являются примитивами без дополнительного кручения (см. раздел 8.7) Их ось представляет собой винтовую линию. Примеры таких стержней показаны на рис. 8.5 *a*, *b*, *d*. Покажем, что любой полосе такого стержня можно придать форму поверхности вращения путем ее изгибания.

Пусть положение рассматриваемой полосы определено так, как это сделано на рис. 8.14. Коэффициенты первой квадратичной формы для этой полосы в этом случае в соответствии с формулами (8.82)–(8.83) будут иметь вид:

$$E(\eta) = \left[U_1^2 + L_2^2(\eta)\right] \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_3^2 + \left[v + L_2(\eta) \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1 - U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_2\right]^2; F = c \cdot U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_3; G = c^2, \tag{8.120}$$

где

$$L_2(\eta) = U_2 + c \cdot \eta. \tag{8.121}$$

Поверхность вращения будем искать в координатной системе x_1, x_2, x_3 в зависимости от параметров t и η рассматриваемой полосы в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1(t,\eta) &= f_1(\eta) \cdot \cos(\beta \cdot t) - f_2(\eta) \cdot \sin(\beta \cdot t); \\ x_2(t,\eta) &= f_1(\eta) \cdot \sin(\beta \cdot t) + f_2(\eta) \cdot \cos(\beta \cdot t); \\ x_3(\eta) &= f_3(\eta), \end{aligned} \tag{8.122}$$

где $f_1(\eta), f_2(\eta), f_3(\eta)$ – неизвестные функции параметра η;
β – неизвестная константа.

Коэффициенты первой квадратичной формы для этой поверхности выражаются формулами:

$$\begin{aligned} E(\eta) &= \beta^2 \cdot \left[f_1^2(\eta) + f_2^2(\eta)\right]; \\ F(\eta) &= \beta \cdot \left[f_1(\eta) \cdot f_2'(\eta) - f_2(\eta) \cdot f_1'(\eta)\right]; \\ G(\eta) &= f_1'^2(\eta) + f_2'^2(\eta) + f_3'^2(\eta). \end{aligned} \tag{8.123}$$

Приравнивая коэффициенты первой квадратичной формы для полосы криволинейного стержня и полосы поверхности вращения, получим систему уравнений для определения функций $f_1(\eta), f_2(\eta), f_3(\eta)$, содержащую одно алгебраическое уравнение и два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} &\beta^2 \cdot \left[f_1^2(\eta) + f_2^2(\eta)\right] = \left[U_1^2 + L_2^2(\eta)\right] \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_3^2 + \left[v + L_2(\eta) \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_1 - U_1 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_2\right]^2; \\ &\beta \cdot \left[f_1(\eta) \cdot f_2'(\eta) - f_2(\eta) \cdot f_1'(\eta)\right] = c \cdot U_2 \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_3; \\ &f_1'^2(\eta) + f_2'^2(\eta) + f_3'^2(\eta) = c^2. \end{aligned} \tag{8.124}$$

Константа β может быть выбрана произвольно. Это означает, что полосу можно свернуть в рулон, причем, диаметр этого рулона может плавно варьироваться (в определенных пределах). Каждому значению β будет соответствовать некоторая по-

верхность вращения. К сожалению, записать уравнение этой поверхности в замкнутом виде для произвольного β не удается. Однако если взять конкретное значение

$$\beta = \beta_0 = \sqrt{{}_{\mathrm{U}}\omega_1^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + \gamma^2}\,, \tag{8.125}$$

где

$$\gamma = v/U_1 - {}_{\mathrm{U}}\omega_2\,, \tag{8.126}$$

то одно из частных решений системы уравнений (8.124) можно будет записать в следующем виде:

$$f_1 = \frac{{}_{\mathrm{U}}\omega_3 \cdot U_1}{\sqrt{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2}}; \quad f_2(\eta) = \frac{L(\eta)\cdot\sqrt{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2}}{\beta_0}; \quad f_3(\eta) = \frac{L(\eta)\cdot\gamma}{\beta_0}\,, \tag{8.127}$$

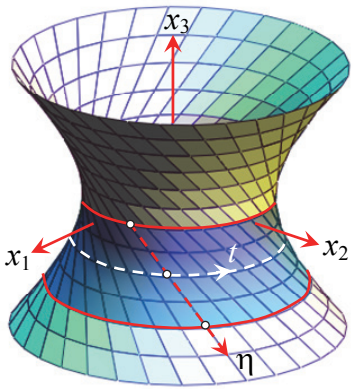


Рис. 8.17. Изгибание полосы на поверхность однополостного гиперболоида вращения

где обозначено

$$L(\eta) = U_2 + c\cdot\eta + \frac{(v - U_1\cdot{}_{\mathrm{U}}\omega_2)\cdot{}_{\mathrm{U}}\omega_1}{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2}\,. \tag{8.128}$$

Подставляя зависимости (8.125) и (8.127) в формулы (8.122), получим уравнения поверхности вращения, выраженные в параметрической форме через параметры t и η. Нетрудно заметить, что эта поверхность представляет собой однополостный гиперболоид вращения (рис. 8.17).

Однополостный гиперболоид вращения имеет прямолинейные образующие. При этом координатные линии криволинейной полосы t = const расположены на этих образующих. Образующая $t = 0$ определяется уравнениями:

$$x_1 = \frac{{}_{\mathrm{U}}\omega_3 \cdot U_1}{\sqrt{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2}}; \quad x_2(\eta) = \frac{L(\eta)\cdot\sqrt{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2}}{\beta_0}; \quad x_3(\eta) = \frac{L(\eta)\cdot\gamma}{\beta_0}\,. \tag{8.129}$$

Горловина этого однополостного гиперболоида вращения имеет радиус:

$$r_{\min} = \frac{{}_{\mathrm{U}}\omega_3 \cdot U_1}{\sqrt{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2}}\,. \tag{8.130}$$

Квадрат радиуса окружности, соответствующей значению параметра η:

$$r^2(\eta) = \frac{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 \cdot U_1^2}{{}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2} + \frac{L^2(\eta)\cdot({}_{\mathrm{U}}\omega_3^2 + {}_{\mathrm{U}}\omega_1^2)}{\beta_0}\,. \tag{8.131}$$

Один виток полосы на поверхности гиперболоида соответствует изменению параметра t на величину:

$$\Delta t = 2 \cdot \pi / \beta_0 \,. \tag{8.132}$$

Следует отметить, что для полос, расположенных близко к оси стержня ($U_1 \to 0$), принцип изгибания полосы криволинейного стержня на поверхность однополостного гиперболоида вращения утрачивает практическое значение, поскольку гиперболоид становится узким и радиусы изгибания полосы становятся сравнимыми с ее толщиной.

Частный случай. Полоса скрученного прямолинейного стержня при произвольных c, v, U_2, ${}_{\mathbf{u}}\omega_1$ и нулевых U_3, ${}_{\mathbf{u}}\omega_2$, ${}_{\mathbf{u}}\omega_3$.

Полоса скрученного прямолинейного стержня путем ее изгибания укладывается на поверхность однополостного гиперболоида вращения с радиусом горловины

$$r_{\min} = U_1 \,. \tag{8.133}$$

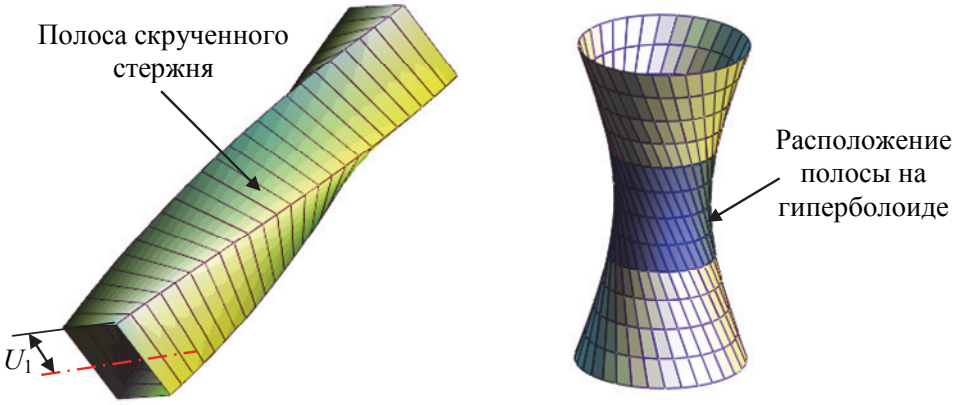


Рис. 8.18. Изгибание полосы скрученного стержня на поверхность однополостного гиперболоида вращения

Прямолинейная образующая этого гиперболоида определяется уравнениями:

$$x_1 = U_1; \quad x_2(\eta) = \frac{c \cdot \eta \cdot {}_{\mathbf{U}}\omega_3 \cdot U_1}{\sqrt{v^2 + {}_{\mathbf{U}}\omega_3^2 \cdot U_1^2}}; \quad x_3(\eta) = \frac{c \cdot \eta \cdot v}{\sqrt{v^2 + {}_{\mathbf{U}}\omega_3^2 \cdot U_1^2}} \,. \tag{8.134}$$

Один виток полосы на поверхности гиперболоида соответствует изменению параметра t на величину:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \pi \cdot U_1}{\sqrt{v^2 + {}_{\mathbf{U}}\omega_3^2 \cdot U_1^2}} \,. \tag{8.135}$$

Следует отметить, что одна и та же полоса скрученного примитивного стержня может быть выложена на различные поверхности вращения. Ширина горловины этих поверхностей может варьироваться в широких пределах. Здесь были рассмотрены лишь простейшие виды поверхностей. При необходимости можно решить задачу о создании специальной поверхности вращения с горловиной заданного радиуса, на которую выкладывается требуемая полоса скрученного стержня.

Послесловие

В этой книге была рассмотрена элементарная математика векторов, винтов, кватернионов и бикватернионов и некоторые ее практические приложения. Основным из них явилось приложение этого математического аппарата к кинематике твердого тела. Оно не выделено в отдельный раздел, а пронизывает весь текст книги, так как именно кинематика твердого тела является мостом между геометрией и механикой в трехмерном пространстве.

К геометрическим приложениям относятся разделы книги по сферической геометрии и формообразованию криволинейных стержней. В разделе "Сферическая геометрия" показано, как при помощи кватернионов выводятся известные тригонометрические формулы и решаются некоторые практические задачи на сфере. В разделе "Формообразование криволинейных стержней" на примере создания формы элемента строительной конструкции показано применение кватернионов и бикватернионов. Здесь существенным образом затронута дифференциальная геометрия кривых в трехмерном пространстве, не привязанная к классическому сопровождающему трехграннику, и теория изгибания поверхностей.

Приложения к механике ограничено статикой гибких стержней. При этом сформулирована в бикватернионах редко рассматриваемая задача о гибком вале, представляющем собой упругий стержень с сердечником, предназначенным для передачи на расстояние под разными углами продольной силы и крутящего момента. В формулировке этой задачи очень важным является то, что перемещения, деформации и внутренние усилия в сечении гибкого вала определяются (каждое) одним ненормированным бикватернионом и для этих бикватернионов получены дифференциальные зависимости. Использование ненормированных кватернионов и бикватернионов нетипично для прикладных задач и встречается, разве что, в задачах по теории относительности. Это качество при формулировке задач в кватернионах и бикватернионах по возможности надо всегда использовать.

Вторая задача по статике гибких стержней, рассмотренная в разделе "Механика упругой проволоки", является классической, однако она обычно формулируется и решается с использованием свободных векторов. На примере этой задачи показано, как можно применить в ней нормированные кватернионы и бикватернионы. Приведены формулировки задачи и получены дифференциальные уравнения для различных наборов основных неизвестных. Уделено внимание вариационной постановке задачи с использованием принципа максимума Понтрягина. Рассмотрены различные краевые условия, включая условия трансверсальности. Отдельно рассмотрено

краевое условие для проволоки нефиксированной длины, пропущенной через втулку.

Разумеется, этими примерами не ограничивается область рационального приложения кватернионов и бикватернионов. Автор этой книги продолжает работу над новыми приложениями кватернионов и бикватернионов в области геометрии и механики.

Важным приложением является описание при помощи кватернионов и бикватернионов симметрии объектов трехмерного пространства. Кватернионы позволяют в компактном виде представить все виды точечной симметрии, с соблюдением изоморфизма между преобразованиями симметрии и нормированными кватернионами. Хочется надеяться на то, что нормированные бикватернионы позволят представить все виды пространственной симметрии.

В свое время видный ученый в области строительной механики А. А. Уманский [56] разработал методы расчета пространственных ферм с использованием винтов (в терминологии А. А. Уманского – моторов). Эта методика легко обобщается на бикватернионы и на метод конечных элементов. Такая задача имеет важное практическое значение.

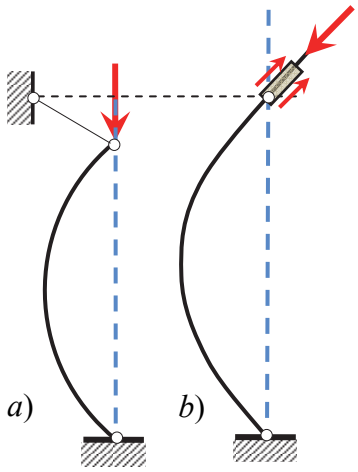
При моделировании рассчитываемой конструкции по методу конечных элементов вводится в рассмотрение большое число декартовых систем координат. Каждый конечный элемент имеет свою систему координат, ориентированную удобным образом относительно элемента. Каждый узел также имеет свою систему координат. При составлении уравнений равновесия надо выполнить переход от систем координат элементов к системам координат узлов, к которым элемент прикреплен, а при вычислении внутренних усилий в элементах – выполнить обратные переходы. Использование кватернионов позволяет получить выигрыш и на объеме хранящейся информации и на числе выполняемых операций, что становится существенным при сотнях тысяч элементов и узлов в одной системе.

Во многих задачах играют существенную роль ошибки округления, которые могут привести к неточным или даже нелепым результатам. Это происходит, как правило, при использовании коротких и жестких вспомогательных элементов, ориентированных под косыми углами к осям узловых координатных систем. Как правило, это жесткие вставки для моделирования эксцентричного присоединения обычных элементов к узлам. Для борьбы с этим злом можно применить по меньшей мере два приема. Один из них эффективен, если система имеет специальную структуру, например, если это цилиндрическая или сферическая оболочка. Тогда можно узловые реперы ориентировать сообразно цилиндрической или сферической системе координат, тем самым резко улучшив обусловленность матрицы системы разрешающих уравнений. Кватернионы помогут перейти к новой системе узловых координат. Второй, более универсальный прием, заключается в том, что, в случае эксцентричного крепления элементов к узлам, центры местных систем координат, находящихся на концах элементов, не надо совмещать с центрами узловых систем координат, а объединять их по принципу бесконечно жесткого тела. Это произойдет автоматически, если для преобразования координат использовать не кватернионы, а бикватернионы. Кроме этого, уменьшится число конечных элементов, а программ-

ный продукт станет короче и понятнее, поскольку процедуры перемножения кватернионов и бикватернионов как раз и осуществляют геометрические преобразования.

В этой книге достаточно подробно представлена геометрическая задача формообразования криволинейных стержней. В продолжение тематики криволинейных стержней можно поставить интересные механические задачи об их упругом деформировании, о построении эпюр внутренних усилий при известных внешних нагрузках и об определении напряжений в сечениях криволинейного стержня при известных внутренних усилиях с применением бикватернионов. При этом возможно воспользоваться различными гипотезами. Наиболее просты гипотезы Бернулли и Тимошенко. Но можно подойти к рассматриваемому объекту также с позиций тонкостенных стержней замкнутого и даже открытого профиля.

В книге не рассмотрены задачи по формообразованию оболочек и по их расчету. Нет никаких препятствий по формулировке и решению таких задач с привлечением кватернионов и бикватернионов.

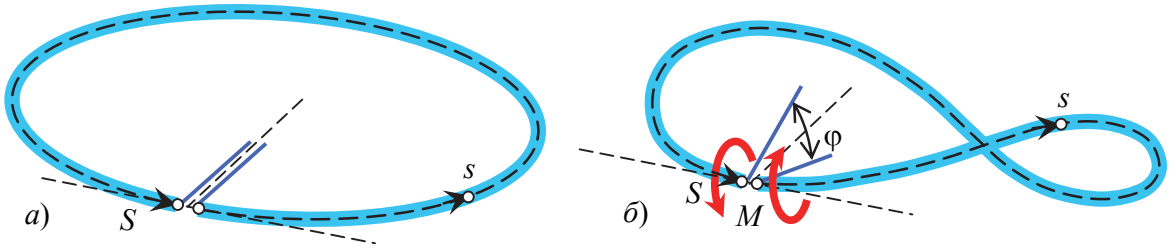


Различные закрепления конца гибкого стержня

Хотелось бы получить при помощи кватернионов решения новых задач. Если возвратиться к разделу "Механика упругой проволоки", мы увидим там лишь выводы разрешающих уравнений и формулировки краевых условий. Одно из них даже необычное: конец проволоки, пропущенный сквозь втулку. Однако, там нет никаких решений. В связи с этим можно попробовать поставить и решить задачи для участка проволоки неопределенной длины, пропущенного сквозь втулку. К примеру, Эйлер решил задачу об устойчивости прямолинейного стержня с заданной длиной (рис. *a*). Закритическая форма этого стержня описывается участком эластики Эйлера с длиной, равной первоначальной длине стержня. А что, если один из концов стержня Эйлера пропустить через втулку, закрепленную в пространстве, и пытаться проталкивать этот стержень сквозь втулку? (рис. *b*) Понятно, что закритическое поведение этих двух стержней будет различным. А будут ли одинаковы критические силы для таких двух стержней? Не факт. А если вместо сжимающей или проталкивающей силы приложить к стержню крутящий момент? С такой задачей связан парадокс Николаи [42], который заключается в том, что прямолинейная форма стержня будет неустойчивой при любом значении крутящего момента, то есть критический крутящий момент равен нулю. Интересно проверить, наблюдается ли парадокс Николаи при втулочном и других закреплениях.

Еще одна интересная задача состоит в следующем. Отрезок прямолинейной проволоки длиной S за счет изгиба превращается в кольцо (см. рис.). Торцы отрезка проволоки неподвижно соединяются между собой так, чтобы кольцо было гладким, без излома в точке соединения. Особенность заключается в том, что перед соедине-

нием к проволоке прикладывается крутящий момент M, деформирующий ее, в результате чего между торцами возникает взаимный угол поворота вокруг общей касательной на концах отрезка проволоки, для определенности равный φ. В результате получается скрученное кольцо (см. рис.). Требуется определить угол φ, форму деформированного кольца и внутренние усилия в нем как функцию крутящего момента. Задачу такого вида можно считать классической.



Кольца из проволоки: *а*) круговое; *б*) скрученное

Не исключено, что решение задачи может быть представлено в замкнутом виде. Интересно, что эта задача уже нашла практическое применение. В Дубае собираются построить мост, несущая арка которого имеет форму скрученного кольца с углом $\varphi = 2 \cdot \pi$. Если вдуматься в фигуру арки, можно заметить, что это – лист Мебиуса трубчатого сечения, а его пространственная форма определяется минимумом энергии, необходимой для превращения первоначально прямолинейного стержня в скрученное кольцо. Внешний вид дубайского моста можно увидеть на одном из рисунков в предисловии.

Здесь приведены примеры задач, для решения которых можно воспользоваться кватернионами и бикватернионами. Они относятся к геометрии, а также к кинематике и статике, как разделам механики. Перечень таких задач можно продолжать, особенно если выйти за пределы механики. Если читатель заинтересуется содержанием книги, он найдет много подходящих задач из области своих интересов.

9. Приложения

9.1. Аналитические функции кватернионного аргумента

В этом приложении кватернион-аргумент **q** и кватернионы-функции **f** представляются с явным указанием направления векторной части в следующем виде:

$$\mathbf{q} = \left[q_0;\quad e_1 \cdot q_\bullet;\quad e_2 \cdot q_\bullet;\quad e_2 \cdot q_\bullet)\right];\quad \mathbf{f} = \left[f_0;\quad e_1 \cdot f_\bullet;\quad e_2 \cdot f_\bullet;\quad e_2 \cdot f_\bullet)\right]. \tag{9.1}$$

Кватернион-аргумент $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ изначально считается полностью известным. Для его представления в форме (9.1) сперва надо определить величину его векторной части:

$$q_\bullet = \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\ . \tag{9.2}$$

Знак перед корнем может быть выбран произвольно. Компоненты единичного вектора e_1, e_2, e_3, определяющего направление векторной части этого кватерниона, при $q_\bullet \neq 0$ вычисляются по формуле:

$$e_j = q_j / q_\bullet \quad (j = 1,2,3)\,. \tag{9.3}$$

При $q_\bullet = 0$ их можно выбрать произвольно, соблюдая равенство:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1\,. \tag{9.4}$$

Заметим, что в нашем случае число $q_\bullet$, определяющее величину векторной части кватерниона-аргумента, может быть положительным, отрицательным или нулем. Норма и модуль кватерниона остаются неотрицательными и определяются формулами:

$$\left\|\mathbf{q}\right\| = q_0^2 + q_\bullet^2;\quad \left|\mathbf{q}\right| = \sqrt{q_0^2 + q_\bullet^2}\ ; \tag{9.5}$$

аргумент кватерниона $\mathrm{Arg}(\mathbf{q})$ определяется аналогично аргументу комплексного числа с точностью до слагаемого $2\cdot\pi\cdot n$, где n – любое целое число. Главное значение аргумента кватерниона $\arg(\mathbf{q})$ находится в пределах $-\pi < \arg(\mathbf{q}) \le \pi$. Расчетные формулы таковы:

$$\arg(\mathbf{q}) = \arg(q_0 + i \cdot q_\bullet) = \mathrm{atan2}(q_0, q_\bullet);\quad \mathrm{Arg}(\mathbf{q}) = \arg(\mathbf{q}) + 2 \cdot \pi \cdot n\,. \tag{9.6}$$

Обычно применяемая для этой цели функция arccos не годится, поскольку она дает правильные значения только для $q_\bullet \ge 0$.

По приведенным выше данным можно определить аналитическую функцию рассматриваемого кватерниона, у которой единичный вектор, определяющий направление векторной части кватерниона-функции, будет (без вариантов) тем же, что и у кватерниона-аргумента. Вторая из формул (9.1) дает рецепт для определения всех компонентов искомого кватерниона.

Ниже приведены формулы для определения скалярной части кватерниона-функции f_0 и величины ее векторной части $f_\bullet$ для основных видов аналитических функций.

Тождественная функция.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}; \quad f_0 = q_0; \quad f_\bullet = q_\bullet. \tag{9.7}$$

Обратная функция.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-1}; \quad f_0 = \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}; \quad f_\bullet = -\frac{q_\bullet}{\|\mathbf{q}\|}. \tag{9.8}$$

Квадрат.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2; \quad f_0 = q_0^2 - q_\bullet^2; \quad f_\bullet = 2 \cdot q_0 \cdot q_\bullet. \tag{9.9}$$

Корень квадратный.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \sqrt{\mathbf{q}}; \quad f_0 = \pm\sqrt{\frac{|\mathbf{q}| + q_0}{2}} = |\mathbf{q}|^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{\theta}{2}; \quad f_\bullet = \pm\sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}} = |\mathbf{q}|^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{\theta}{2}, \tag{9.10}$$

где $\theta = \mathrm{Arg}(\mathbf{q}) = \arg(\mathbf{q}) + 2\cdot\pi\cdot n$; $n = 0, 1$.

Корень квадратный от кватерниона – функция двузначная.

Экспонента.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \exp\mathbf{q}; \quad f_0 = \exp q_0 \cdot \cos q_\bullet; \quad f_\bullet = \exp q_0 \cdot \sin q_\bullet. \tag{9.11}$$

Половинная экспонента.

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{q}\right) = \exp\frac{\mathbf{q}}{2}; \quad f_0 = \exp\frac{q_0}{2} \cdot \cos\frac{q_\bullet}{2}; \quad f_\bullet = \exp\frac{q_0}{2} \cdot \sin\frac{q_\bullet}{2}. \tag{9.12}$$

Экспонента чисто векторного кватерниона ($q_0 = 0$) – нормированный кватернион.

Натуральный логарифм.

$$\mathbf{f} = \mathrm{Ln}\,\mathbf{q}; \quad f_0 = \ln|\mathbf{q}|; \quad f_\bullet = \theta, \tag{9.13}$$

где $\theta = \mathrm{Arg}(\mathbf{q}) = \arg(\mathbf{q}) + 2\cdot\pi\cdot n$; n – любое целое число.

Натуральный логарифм нормированного кватерниона ($|\mathbf{q}| = 1$) – чисто векторный кватернион. Натуральный логарифм – многозначная функция. Она для каждого n принимает свое значение, и все эти значения различны.

Степенная функция.

$$\mathbf{f} = \mathbf{q}^\tau; \quad f_0 = |\mathbf{q}|^\tau \cdot \cos(\theta \cdot \tau); \quad f_\bullet = |\mathbf{q}|^\tau \cdot \sin(\theta \cdot \tau), \tag{9.14}$$

где τ – действительное число; $\theta = \mathrm{Arg}(\mathbf{q}) = \arg(\mathbf{q}) + 2\cdot\pi\cdot n$; n – любое целое число.

Заметим, что

$$\mathrm{Ln}(\mathbf{q}^{\tau}) = \tau \cdot \mathrm{Ln}\,\mathbf{q}\,. \tag{9.15}$$

Степенная функция кватерниона – многозначная функция. Она принимает все различные значения только тогда, когда показатель степени – иррациональное число. Если показатель степени τ – число рациональное, выражающееся несократимой дробью r/s, где r и s – целые числа, количество различных значений степенной функции будет равно s. Эти значения будут реализоваться при $n = 0, 1,..., s-1$, а при других значениях n те же значения будут последовательно повторяться. Если показатель степени τ – число целое, при любом n будет реализоваться одно и то же значение степенной функции.

Синус.

$$\mathbf{f} = \sin\mathbf{q};\quad f_0 = \sin q_0 \cdot \mathrm{ch}\; q_\bullet;\quad f_\bullet = \cos q_0 \cdot \mathrm{sh}\; q_\bullet\,. \tag{9.16}$$

Косинус.

$$\mathbf{f} = \cos\mathbf{q};\quad f_0 = \cos q_0 \cdot \mathrm{ch}\; q_\bullet;\quad f_\bullet = -\sin q_0 \cdot \mathrm{sh}\; q_\bullet\,. \tag{9.17}$$

Гиперболический синус.

$$\mathbf{f} = \mathrm{sh}\,\mathbf{q};\quad f_0 = \mathrm{sh} q_0 \cdot \cos q_\bullet;\quad f_\bullet = \mathrm{ch} q_0 \cdot \cos q_\bullet\,. \tag{9.18}$$

Гиперболический косинус.

$$\mathbf{f} = \mathrm{ch}\mathbf{q};\quad f_0 = \mathrm{ch} q_0 \cdot \cos q_\bullet;\quad f_\bullet = \mathrm{sh} q_0 \cdot \sin q_\bullet\,. \tag{9.19}$$

Пример. Приведем поэлементную запись экспоненты кватерниона $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$, полученную с использованием формул (9.11):

$$\mathbf{f} = \exp\mathbf{q} = \left[\exp q_0 \cdot \cos q_\bullet; \frac{q_1}{q_\bullet} \cdot \exp q_0 \cdot \sin q_\bullet; \frac{q_2}{q_\bullet} \cdot \exp q_0 \cdot \sin q_\bullet; \frac{q_3}{q_\bullet} \cdot \exp q_0 \cdot \sin q_\bullet)\right], \tag{9.20}$$

где $q_\bullet = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Перед корнем выбран знак "плюс".

Поскольку аналитические функции одного и того же кватерниона коллинеарны кватерниону-аргументу и между собой, они перестановочны при умножении.

9.2. Дифференциалы для некоторых аналитических функций

Дифференциал кватернионной аналитической функции **f**(**q**) кватернионного аргумента **q** может быть представлен поэлементно в векторно-матричном виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} df_0 \\ df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 & -e_1 \cdot d_\bullet & -e_2 \cdot d_\bullet & -e_3 \cdot d_\bullet \\ e_1 \cdot d_\bullet & T - e_1^2 \cdot (T - d_0) & -e_1 \cdot e_2 \cdot (T - d_0) & -e_1 \cdot e_3 \cdot (T - d_0) \\ e_2 \cdot d_\bullet & -e_2 \cdot e_1 \cdot (T - d_0) & T - e_2^2 \cdot (T - d_0) & -e_2 \cdot e_3 \cdot (T - d_0) \\ e_3 \cdot d_\bullet & -e_3 \cdot e_1 \cdot (T - d_0) & -e_3 \cdot e_2 \cdot (T - d_0) & T - e_3^2 \cdot (T - d_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}, \tag{9.21}$$

где dq_j и df_j (j = 0, 1, 2, 3) – дифференциалы компонентов кватернионов аргумента и функции; e_1, e_2, e_3 – компоненты единичного вектора, определяющего направление

векторной части кватернионов аргумента и функции, определяемые по формулам (9.2), (9.3); d_0, $d_\bullet$ и T – параметры, зависящие от вида функции.

Зависимость (9.21) будет определена, если известны выражения для d_0, $d_\bullet$ и T. Ниже приведены эти выражения для различных видов аналитических функций. В тех случаях, когда кватернион дифференциала функции может быть выражен через кватернионы дифференциала и функций аргумента при помощи кватернионных операций, эти формулы приведены в скобках.

Тождественная функция.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q};\quad d_0 = 1;\quad d_\bullet = 0;\quad T = 1;\quad (\mathbf{df} = \mathbf{dq}). \tag{9.22}$$

Обратная функция.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-1};\quad d_0 = -\frac{q_0^2 - q_\bullet^{\,2}}{\|\mathbf{q}\|^2};\quad d_\bullet = \frac{2\cdot q_0 \cdot q_\bullet}{\|\mathbf{q}\|^2};\quad T = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|};\quad (\mathbf{df} = -\mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{dq}\circ\mathbf{q}^{-1}). \tag{9.23}$$

Квадрат.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2;\quad d_0 = 2\cdot q_0;\quad d_\bullet = 2\cdot q_\bullet;\quad T = 2\cdot q_0;\quad (\mathbf{df} = \mathbf{dq}\circ\mathbf{q} + \mathbf{q}\circ\mathbf{dq}). \tag{9.24}$$

Корень квадратный.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \sqrt{\mathbf{q}};\quad d_0 = \pm\frac{1}{2\cdot|\mathbf{q}|}\cdot\sqrt{\frac{|\mathbf{q}| + q_0}{2}};\quad d_\bullet = \mp\frac{1}{2\cdot|\mathbf{q}|}\cdot\sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}};\quad T = \pm\frac{1}{q_\bullet}\cdot\sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}}. \tag{9.25}$$

Экспонента.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \exp\mathbf{q};\quad d_0 = \exp q_0\cdot\cos q_\bullet;\quad d_\bullet = \exp q_0\cdot\sin q_\bullet;\quad T = \exp q_0\cdot\frac{\sin q_\bullet}{q_\bullet}. \tag{9.26}$$

Половинная экспонента.

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{q}\right) = \exp\frac{\mathbf{q}}{2};\ d_0 = \frac{1}{2}\cdot\exp\frac{q_0}{2}\cdot\cos\frac{q_\bullet}{2};\ d_\bullet = \frac{1}{2}\cdot\exp\frac{q_0}{2}\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2};\ T = \frac{1}{q_\bullet}\cdot\exp\frac{q_0}{2}\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2}. \tag{9.27}$$

Натуральный логарифм.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathrm{Ln}\,\mathbf{q};\quad d_0 = \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|};\quad d_\bullet = -\frac{q_\bullet}{\|\mathbf{q}\|};\quad T = \frac{\theta}{q_\bullet}, \tag{9.28}$$

где $\theta = \mathrm{Arg}(\mathbf{q}) = \arg(\mathbf{q}) + 2\cdot\pi\cdot n$; n – любое целое число.

Степенная функция.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^\tau;\ d_0 = \tau\cdot|\mathbf{q}|^{\tau-1}\cdot\cos\left[\theta\cdot(\tau-1)\right];\ d_\bullet = \tau\cdot|\mathbf{q}|^{\tau-1}\cdot\sin\left[\theta\cdot(\tau-1)\right];\ T = \frac{|\mathbf{q}|^\tau}{q_\bullet}\cdot\sin(\theta\cdot\tau), \tag{9.29}$$

где τ – действительное число; θ – то же, что и в случае натурального алгоритма.

Синус.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \sin\mathbf{q};\quad d_0 = \cos q_0\cdot\mathrm{ch}\,q_\bullet;\quad d_\bullet = -\sin q_0\cdot\mathrm{sh}\,q_\bullet;\quad T = \cos q_0\cdot\frac{\mathrm{sh}\,q_\bullet}{q_\bullet}. \tag{9.30}$$

Косинус.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \cos \mathbf{q}; \quad d_0 = -\sin q_0 \cdot \operatorname{ch} q_\bullet; \quad d_\bullet = -\cos q_0 \cdot \operatorname{sh} q_\bullet; \quad T = -\sin q_0 \cdot \frac{\operatorname{sh} q_\bullet}{q_\bullet}. \tag{9.31}$$

Синус гиперболический.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \operatorname{sh} \mathbf{q}; \quad d_0 = \operatorname{ch} q_0 \cdot \cos q_\bullet; \quad d_\bullet = \operatorname{sh} q_0 \cdot \sin q_\bullet; \quad T = \operatorname{ch} q_0 \cdot \frac{\sin q_\bullet}{q_\bullet}. \tag{9.32}$$

Косинус гиперболический.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \operatorname{ch} \mathbf{q}; \quad d_0 = \operatorname{sh} q_0 \cdot \cos q_\bullet; \quad d_\bullet = \operatorname{ch} q_0 \cdot \sin q_\bullet; \quad T = \operatorname{sh} q_0 \cdot \frac{\sin q_\bullet}{q_\bullet}. \tag{9.33}$$

Следует отметить, что кватернион дифференциала функции в общем случае не коллинеарен кватерниону функции.

9.3. Кватернионы элементарных поворотов

В этом приложении рассмотрены наиболее применяемые элементарные повороты. Изложение иллюстрировано рисунками, на которых объектом поворотов является твердое тело, имеющее форму коротыша из неравнополочного уголка. Исходное положение этого тела показано пунктирными линиями, а повернутое – сплошными линиями. На рисунках показана неподвижная система координат x_1, x_2, x_3, подвижная система координат y_1, y_2, y_3, а также направленный отрезок оси, вокруг которой выполняется поворот. Подвижная система координат для наглядности смещена относительно неподвижной точки вращения и привязана к повернутому твердому телу.

Каждый элементарный поворот снабжен формулами, по которым определяются компоненты нормированного половинного экспоненциального кватерниона. Для преобразований годятся и ненормированные кватернионы, получающиеся из нормированных умножением на произвольное число. В примерах с целью компактности представления чаще всего приводятся соответствующие ненормированные кватернионы.

9.3.1. Поворот вокруг вектора с направляющими косинусами e_1, e_2, e_3 на угол α

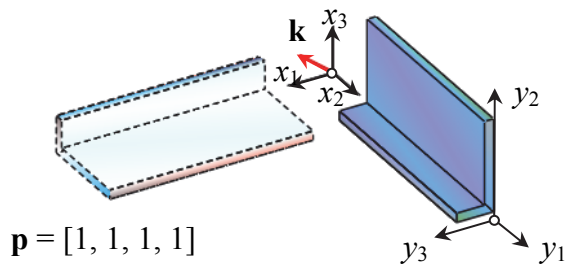


Рис. 9.1. Поворот вокруг вектора **k** на угол α

Этот поворот представляется кватернионом:

$$\mathbf{p} = \left[\cos\frac{\alpha}{2}, \quad k_1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \quad k_2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \quad k_3 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \right]. \tag{9.34}$$

На рис. 9.1 показан поворот на угол $2\cdot\pi/3$ или 120° вокруг направления равнонаклоненного к осям x_1, x_2, x_3. Для этого примера

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{9.35}$$

Искомый кватернион имеет вид:

$$\mathbf{p} = \left[\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right]. \tag{9.36}$$

Для преобразования координат по формуле (2.253) можно использовать также удвоенное значение этого кватерниона:

$$2\cdot\mathbf{p} = [1, \quad 1, \quad 1, \quad 1]. \tag{9.37}$$

В частном случае, при повороте на прямой угол формула (9.34) имеет вид:

$$\mathbf{p} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot[1, \quad k_1, \quad k_2, \quad k_3,], \tag{9.38}$$

а при повороте на угол $\pm\,\pi$ выглядит так:

$$\mathbf{p} = [0, \quad k_1, \quad k_2, \quad k_3]. \tag{9.39}$$

На рис. 9.2 показан поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси x_3, реализуемый кватернионом

$$\mathbf{p} = [1, \quad 0, \quad 0, \quad 1], \tag{9.40}$$

и поворот на угол $\pm\pi$ вокруг оси x_3, реализуемый кватернионом

$$\mathbf{p} = [0, \quad 0, \quad 0, \quad 1]. \tag{9.41}$$

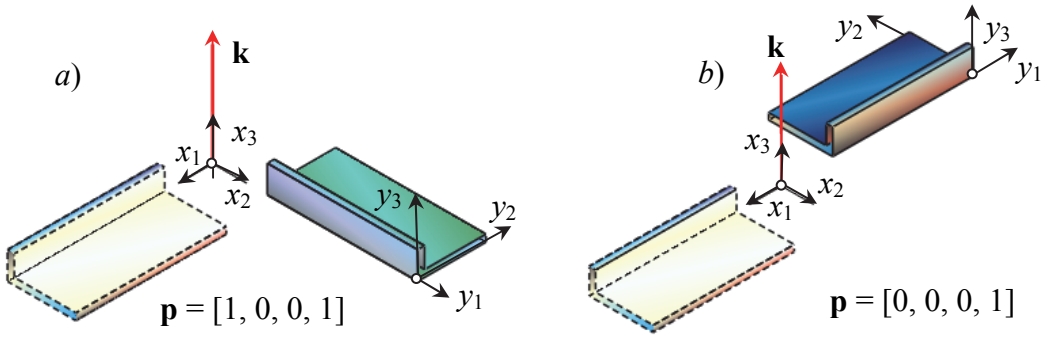


Рис. 9.2. Поворот вокруг оси x_3 на угол: *a*) $\pi/2$; *b*) $\pm\pi$

9.3.2. Поворот вокруг вектора с направляющими косинусами e_1, e_2, e_3 на угол α $(-\pi < \alpha \le \pi)$, если известны косинус C и синус S этого угла

В этом случае рациональнее всего определить угол α по формуле:

$$\alpha = \operatorname{atan2}(C, S); \tag{9.42}$$

а затем перейти к формуле (9.34). Можно воспользоваться также формулой:

$$\mathbf{p} = \left[\sqrt{\frac{1+C}{2}}, \quad k_1 \cdot \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{\frac{1-C}{2}}, \quad k_2 \cdot \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{\frac{1-C}{2}}, \quad k_3 \cdot \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{\frac{1-C}{2}}, \right]. \tag{9.43}$$

Однако, эта формула не достаточно хорошо обусловлена при углах α, близких к нулю. Для вычислений она использует лишь значение C, а из информации, содержащейся в значении S, использует только знак.

9.3.3. *Поворот вокруг координатных осей с номерами* 1, 2, 3 *на углы* α_1, α_2, α_3

$$\mathbf{p1} = \left[\cos\frac{\alpha_1}{2}, \sin\frac{\alpha_1}{2}, 0, 0, \right]; \mathbf{p2} = \left[\cos\frac{\alpha_2}{2}, 0, \sin\frac{\alpha_2}{2}, 0 \right]; \mathbf{p3} = \left[\cos\frac{\alpha_3}{2}, 0, 0, \sin\frac{\alpha_3}{2} \right]. \tag{9.44}$$

В частном случае, при повороте на прямой угол:

$$\mathbf{p1} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \right]; \quad \mathbf{p2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right]; \quad \mathbf{p3} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]. \tag{9.45}$$

В частном случае, при повороте на угол $\pm\pi$:

$$\mathbf{p1} = [0, 1, 0, 0,]; \quad \mathbf{p2} = [0, 0, 1, 0]; \quad \mathbf{p3} = [0, 0, 0, 1]. \tag{9.46}$$

На рис. 9.3 и рис. 9.4 показаны повороты твердого тела вокруг осей x_1, и x_2, на углы $\pi/2$ и $\pm\pi$. Половинные экспоненциальные кватернионы приведены в поле рисунка.

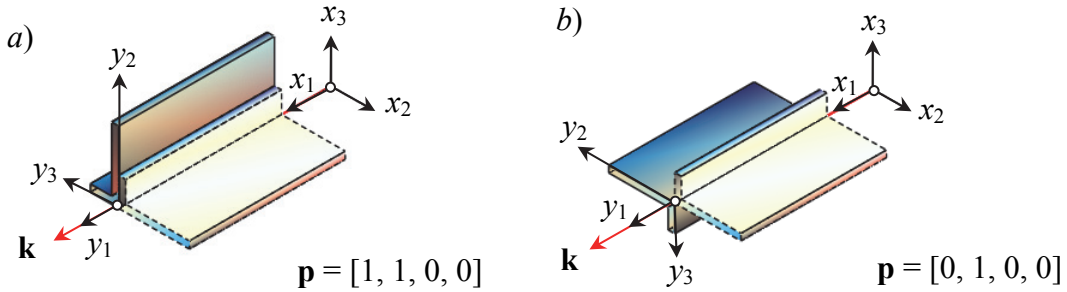


Рис. 9.3. Повороты: *a*) вокруг оси x_1 на угол $\pi/2$; *b*) вокруг оси x_1 на угол: $\pm\pi$

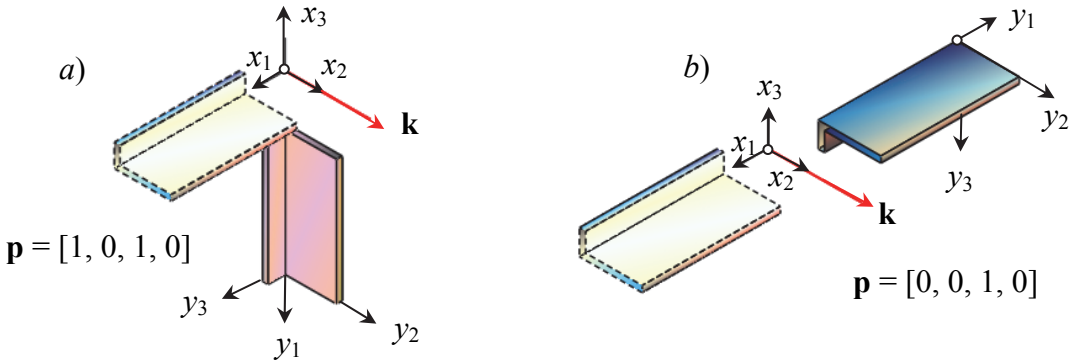


Рис. 9.4. Повороты: *a*) вокруг оси x_2 на угол $\pi/2$; *b*) вокруг оси x_2 на угол: $\pm\pi$

9.3.4. Поворот до совмещения оси 1 с заданным направлением

Дана неподвижная система координат x_1, x_2, x_3 и направление, заданное направляющими косинусами c_1, c_2, c_3 в этой системе координат. Тело со связанной с ним системой координат y_1, y_2, y_3 было расположено вначале так, что неподвижная и связанная системы совпадали. Затем тело повернули по кратчайшему пути так, что ось y_1 совпала с направлением c_1, c_2, c_3. Требуется найти кватернион **p**, соответствующий этому повороту.

Выполнив необходимые преобразования, придем к кватерниону со следующими компонентами:

$$\mathbf{p} = \left[\sqrt{\frac{1+c_1}{2}},\quad 0,\quad -\frac{c_3}{\sqrt{c_2^2+c_3^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-c_1}{2}},\quad \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2+c_3^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-c_1}{2}} \right]. \tag{9.47}$$

Описанный поворот показан на рис. 9.5 для направления $c_1 = 0$; $c_2 = 0{,}8$; $c_3 = 0{,}6$.

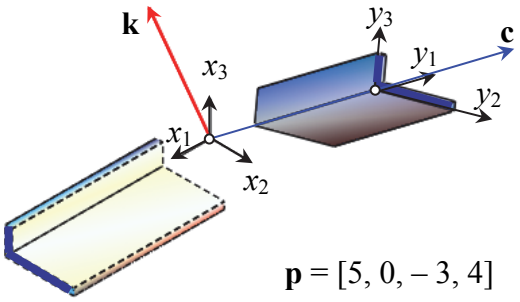


Рис. 9.5. Поворот до совмещения оси 1 с направлением ***c***

Вычисления по формуле (9.47) приводят к следующему результату:

$$\mathbf{p} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 0,\quad -0{,}6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},\quad 0{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right]. \tag{9.48}$$

В поле рисунка показан кватернион, пропорциональный этому.

9.3.5. Поворот до совмещения направления a с направлением b

Тело расположено так, что ось y_1 связанной с ним системы координат сонаправлена вектору с компонентами a_1, a_2, a_3 в неподвижной системе координат. Затем тело повернули по кратчайшему пути так, что ось y_1 стала сонаправленной вектору с компонентами b_1, b_2, b_3 в неподвижной системе координат. Требуется найти кватернион **p**, соответствующий этому повороту.

Решение задачи дается следующей формулой:

$$\mathbf{p} = \sqrt{\mathbf{v}}, \tag{9.49}$$

где:

$$\mathbf{a} = [0, a_1, a_2, a_3]; \quad \mathbf{b} = [0, b_1, b_2, b_3]; \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \circ \frac{\bar{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|}. \tag{9.50}$$

Формула (9.49) в развернутом виде приведена ниже:

$$\mathbf{p} = \left[\sqrt{\frac{1+v_0}{2}}, \quad \frac{v_1}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-v_0}{2}}, \quad \frac{v_2}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-v_0}{2}}, \quad \frac{v_3}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-v_0}{2}} \right]. \tag{9.51}$$

На рис. 9.6 показан пример такого поворота, где $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$; $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$,

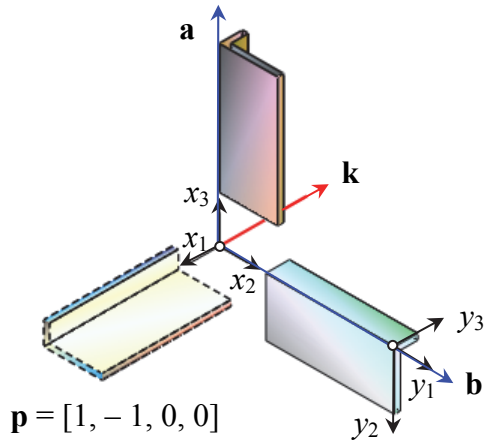


Рис. 9.6. Поворот до совмещения направления **a** с направлением **b**

Кватернион **v** = [0, –1, 0, 0], а вычисленный по формуле (9.51) кватернион **p** имеет вид:

$$\mathbf{p} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0, \quad 0 \right]. \tag{9.52}$$

В поле рисунка показан кватернион, пропорциональный этому.

9.3.6. Поворот направления a до направления b, нормального плоскости

Тело расположено так, что ось y_1 связанной с ним системы координат сонаправлена вектору с компонентами a_1, a_2, a_3 в неподвижной системе координат. Затем тело повернули по кратчайшему пути так, что ось y_1 стала нормальной к плоскости, заданной уравнением:

$$b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 = 0 \tag{9.53}$$

и сонаправленной вектору с компонентами b_1, b_2, b_3 в неподвижной системе координат. Требуется найти кватернион **p**, соответствующий этому повороту.

Эта задача эквивалентна предыдущей, и ее решение дается формулой (9.49).

На рис. 9.7 показан пример такой задачи, причем направления заданы числами: $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 0$; $b_1 = –0{,}6$; $b_2 = 0$; $b_3 = 1$. Кватернион v = [0; 0,857; 0; 0,514], а вычисленный по формуле (9.51) кватернион **p** имеет вид:

$$\mathbf{p} = [0{,}707;\ 0{,}606;\ 0;\ 0{,}364]. \tag{9.54}$$

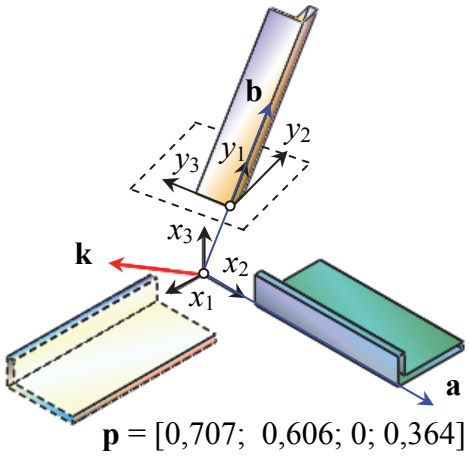


Рис. 9.7. Поворот до совмещения направления **a** с нормалью к заданной плоскости **b**

Каждый элементарный поворот можно осуществлять как в неподвижной, так и в подвижной системах координат и складывать по правилам, изложенным в разделе 2.8.4.

Формулы этого раздела написаны так, что результирующий кватернион оказывается нормированным. Однако все будет верно и в том случае, если пользоваться ненормированными кватернионами, поскольку умножение кватернионов **p** на число никак не изменит результата прямого преобразования координат:

$$ {}_{X}\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ {}_{Y}\mathbf{q} \circ \mathbf{p}^{-1} \tag{9.55}$$

или обратного преобразования:

$$ {}_{Y}\mathbf{q} = \mathbf{p}^{-1} \circ {}_{X}\mathbf{q} \circ \mathbf{p} \,. \tag{9.56}$$

9.4. Аналитические функции дуального аргумента

В этом приложении приведены наиболее употребительные аналитические дуальные функции $F = f + \varpi \cdot f^{\circ}$ дуального аргумента $A = a + \varpi \cdot a^{\circ}$ и параметры этих функций $\lceil F \rceil$.

Тождественная функция.

$$ F = A; \quad F = a + \varpi \cdot a^{\circ}; \quad \lceil F \rceil = \frac{a^{\circ}}{a} \,. \tag{9.57}$$

Обратная функция.

$$ F = \frac{1}{A}; \quad F = \frac{1}{a} - \varpi \cdot \frac{a^{\circ}}{a^2}; \quad \lceil F \rceil = -\frac{a^{\circ}}{a} \,. \tag{9.58}$$

Квадрат.

$$ F = A^2; \quad F = a^2 + \varpi \cdot 2 \cdot a \cdot a^{\circ}; \quad \lceil F \rceil = 2 \cdot \frac{a^{\circ}}{a} \,. \tag{9.59}$$

Корень квадратный.

$$F = \sqrt{A}; \quad F = \sqrt{a} + \varpi \cdot \sqrt{a} \cdot \frac{a^\circ}{2 \cdot a}; \quad \lceil F \rceil = \frac{a^\circ}{2 \cdot a}. \tag{9.60}$$

Экспонента.

$$F = \exp A; \quad F = \exp a + \varpi \cdot a^\circ \cdot \exp a; \quad \lceil F \rceil = a^\circ. \tag{9.61}$$

Половинная экспонента.

$$F = \exp \frac{A}{2}; \quad F = \exp \frac{a}{2} + \varpi \cdot \frac{a^\circ}{2} \cdot \exp \frac{a}{2}; \quad \lceil F \rceil = \frac{a^\circ}{2}. \tag{9.62}$$

Натуральный логарифм.

$$F = \ln A; \quad F = \ln a + \varpi \cdot \frac{a^\circ}{a}; \quad \lceil F \rceil = \frac{a^\circ}{a \cdot \ln a}. \tag{9.63}$$

Степенная функция.

$$F = A^B; \quad F = a^b + \varpi \cdot a^b \cdot b \cdot \left(\frac{a^\circ}{a} + \frac{b^\circ}{b} \cdot \ln a \right); \quad \lceil F \rceil = b \cdot \left(\frac{a^\circ}{a} + \frac{b^\circ}{b} \cdot \ln a \right); \tag{9.64}$$

$$F = A^\tau; \quad F = a^\tau + \varpi \cdot a^\tau \cdot \tau \cdot \frac{a^\circ}{a}; \quad \lceil F \rceil = \tau \cdot \frac{a^\circ}{a}, \tag{9.65}$$

где $B = b + \varpi \cdot b^\circ$ – дуальное число; τ – действительное число.

Синус.

$$F = \sin A; \quad F = \sin a + \varpi \cdot a^\circ \cdot \cos a; \quad \lceil F \rceil = a^\circ \cdot \mathrm{ctg} a. \tag{9.66}$$

Косинус.

$$F = \cos A; \quad F = \cos a - \varpi \cdot a^\circ \cdot \sin a; \quad \lceil F \rceil = -a^\circ \cdot \mathrm{tg} a. \tag{9.67}$$

Синус гиперболический.

$$F = \mathrm{sh}\, A; \quad F = \mathrm{sh}\, a + \varpi \cdot a^\circ \cdot \mathrm{ch}\, a; \quad \lceil F \rceil = a^\circ \cdot \mathrm{cth} a. \tag{9.68}$$

Косинус гиперболический.

$$F = \mathrm{ch}\, A; \quad F = \mathrm{ch}\, a + \varpi \cdot a^\circ \cdot \mathrm{sh}\, a; \quad \lceil F \rceil = a^\circ \cdot \mathrm{th} a. \tag{9.69}$$

Отметим, что для функций дуальных переменных соблюдаются привычные соотношения:

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1; \quad \sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B; \tag{9.70}$$

$$(A^B)^C = A^{B \cdot C}; \quad A^B \cdot A^C = A^{(B+C)}. \tag{9.71}$$

9.5. Аналитические функции бикватернионного аргумента

Аналогично тому, как были представлены аналитические функции кватерниона, приведем формулы для аналитических функций бикватерниона. Будем полагать, что

бикватернион-аргумент **Q** и бикватернион-функция **F** представлены в специальном виде:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q_0 \\ e_1\cdot q_\bullet \\ e_2\cdot q_\bullet \\ e_3\cdot q_\bullet \end{bmatrix}+\varpi\cdot\begin{bmatrix} q^\circ{}_0 \\ e^\circ{}_1\cdot q_\bullet+e_1\cdot q^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_2\cdot q_\bullet+e_2\cdot q^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_3\cdot q_\bullet+e_3\cdot q^\circ{}_\bullet \end{bmatrix};\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} f_0 \\ e_1\cdot f_\bullet \\ e_2\cdot f_\bullet \\ e_3\cdot f_\bullet \end{bmatrix}+\varpi\cdot\begin{bmatrix} f^\circ{}_0 \\ e^\circ{}_1\cdot f_\bullet+e_1\cdot f^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_2\cdot f_\bullet+e_2\cdot f^\circ{}_\bullet \\ e^\circ{}_3\cdot f_\bullet+e_3\cdot f^\circ{}_\bullet \end{bmatrix}, \tag{9.72}$$

где e_j, $e^\circ{}_j$ (j = 1, 2, 3) – компоненты единичного винта, определяющего ось бикватернионов **Q** и **F**; q_0, $q^\circ{}_0$, $q_\bullet$, $q^\circ{}_\bullet$ – параметры специального представления бикватерниона-аргумента; f_0, $f^\circ{}_0$, $f_\bullet$, $f^\circ{}_\bullet$ – параметры специального представления бикватерниона-функции.

Для перехода от обычного представления:

$$\mathbf{Q}=\left[q_0+\varpi\cdot q^\circ{}_0;\quad q_1+\varpi\cdot q^\circ{}_1;\quad q_2+\varpi\cdot q^\circ{}_2;\quad q_3+\varpi\cdot q^\circ{}_3\right] \tag{9.73}$$

к специальному, можно воспользоваться формулами:

$$q_\bullet=\pm\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2};\ q^\circ{}_\bullet=\frac{q_1\cdot q^\circ{}_1+q_2\cdot q^\circ{}_2+q_3\cdot q^\circ{}_3}{q_\bullet};\ e_j=\frac{q_j}{q_\bullet};\ e^\circ{}_j=\frac{q^\circ{}_j-q^\circ{}_\bullet\cdot e_j}{q_\bullet}\ (j=1,2,3). \tag{9.74}$$

Заметим, что это преобразование выполняется неоднозначно. В формулах (4.53) перед корнем квадратным может быть выбран знак "плюс" или знак "минус".

Ниже приведены формулы для определения параметров бикватерниона-функции f_0, $f^\circ{}_0$, $f_\bullet$, $f^\circ{}_\bullet$ через такие же параметры бикватерниона-аргумента q_0, $q^\circ{}_0$ $q_\bullet$, $q^\circ{}_\bullet$ для наиболее употребительных бикватернион-функций.

Тождественная функция.

$$\mathbf{F}=\mathbf{Q}=\mathbf{q}+\varpi\cdot\mathbf{q}^\circ;\quad f_0=q_0;\quad f^\circ{}_0=q^\circ{}_0;\quad f_\bullet=q_\bullet;\quad f^\circ{}_\bullet=q^\circ{}_\bullet. \tag{9.75}$$

Обратная функция:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}=\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{q}^{-1}-\varpi\cdot\mathbf{q}^{-1}\circ\mathbf{q}^\circ\circ\mathbf{q}^{-1};\quad f_0=\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|};\quad f_\bullet=-\frac{q_\bullet}{\|\mathbf{q}\|};\\ f^\circ{}_0=\frac{q^\circ{}_0}{\|\mathbf{q}\|}-\frac{2\cdot q_0\cdot(q_0\cdot q^\circ{}_0+q_\bullet\cdot q^\circ{}_\bullet)}{\|\mathbf{q}\|^2};\quad f^\circ{}_\bullet=-\frac{q^\circ{}_\bullet}{\|\mathbf{q}\|}+\frac{2\cdot q_\bullet\cdot(q_0\cdot q^\circ{}_0+q_\bullet\cdot q^\circ{}_\bullet)}{\|\mathbf{q}\|^2}.\end{gathered} \tag{9.76}$$

Обращение нормированного бикватерниона приводит к нормированному бикватерниону.

Квадрат:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}=\mathbf{Q}^2=\mathbf{q}^2+\varpi\cdot(\mathbf{q}^\circ\circ\mathbf{q}+\mathbf{q}\circ\mathbf{q}^\circ);\quad f_0=q_0^2-q_\bullet^2;\quad f_\bullet=2\cdot q_0\cdot q_\bullet;\\ f^\circ{}_0=2\cdot(q_0\cdot q^\circ{}_0-q_\bullet\cdot q^\circ{}_\bullet);\quad f^\circ{}_\bullet=2\cdot(q_0\cdot q^\circ{}_\bullet+q_\bullet\cdot q^\circ{}_0).\end{gathered} \tag{9.77}$$

Корень квадратный:

$$\mathbf{F}=\sqrt{\mathbf{Q}};\quad f_0=\pm\sqrt{\frac{|\mathbf{q}|+q_0}{2}};\quad f_\bullet=\pm\sqrt{\frac{|\mathbf{q}|-q_0}{2}};$$
$$f^\circ_0=\pm\frac{q^\circ_0}{2\cdot|\mathbf{q}|}\cdot\sqrt{\frac{|\mathbf{q}|+q_0}{2}}\pm\frac{q^\circ_\bullet}{2\cdot|\mathbf{q}|}\cdot\sqrt{\frac{|\mathbf{q}|-q_0}{2}};\ f^\circ_\bullet=\mp\frac{q^\circ_0}{2\cdot|\mathbf{q}|}\cdot\sqrt{\frac{|\mathbf{q}|-q_0}{2}}\pm\frac{q^\circ_\bullet}{2\cdot|\mathbf{q}|}\cdot\sqrt{\frac{|\mathbf{q}|+q_0}{2}}. \tag{9.78}$$

Экспонента:

$$\mathbf{F}=\exp\mathbf{Q};\quad f_0=\exp q_0\cdot\cos q_\bullet;\quad f_\bullet=\exp q_0\cdot\sin q_\bullet;$$
$$f^\circ_0=\exp q_0\cdot(q^\circ_0\cdot\cos q_\bullet-q^\circ_\bullet\cdot\sin q_\bullet);\quad f_\bullet=\exp q_0\cdot(q^\circ_0\cdot\sin q_\bullet+q^\circ_\bullet\cdot\cos q_\bullet). \tag{9.79}$$

Экспонента чисто винтового бикватерниона есть нормированный бикватернион.

Половинная экспонента:

$$\mathbf{F}=\exp\frac{\mathbf{Q}}{2};\quad f_0=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\cos\frac{q_\bullet}{2};\quad f_\bullet=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2};$$
$$f^\circ_0=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\left(\frac{q^\circ_0}{2}\cdot\cos\frac{q_\bullet}{2}-\frac{q^\circ_\bullet}{2}\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2}\right);\ f^\circ_\bullet=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\left(\frac{q^\circ_0}{2}\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2}+\frac{q^\circ_\bullet}{2}\cdot\cos\frac{q_\bullet}{2}\right). \tag{9.80}$$

Половинная экспонента чисто винтового бикватерниона есть нормированный бикватернион.

Натуральный логарифм:

$$\mathbf{F}=\mathrm{Ln}\mathbf{Q};\quad f_0=\ln|\mathbf{q}|;\quad f_\bullet=\theta;\quad f^\circ_0=\frac{q_0\cdot q^\circ_0+q_\bullet\cdot q^\circ_\bullet}{\|\mathbf{q}\|};\quad f^\circ_\bullet=\frac{q_0\cdot q^\circ_\bullet-q_\bullet\cdot q^\circ_0}{\|\mathbf{q}\|}, \tag{9.81}$$

где θ – поворот бикватерниона $\mathbf{Q}$, определяемый по формуле:

$$\theta=\arg(q_0+i\cdot q_\bullet)+2\cdot\pi\cdot n; \tag{9.82}$$

n – произвольное натуральное число; i – мнимая единица.

Натуральный логарифм – многозначная функция. Натуральный логарифм нормированного бикватерниона есть чисто винтовой бикватернион.

Степенная функция:

$$\mathbf{F}=\mathbf{Q}^\tau;\quad f_0=|\mathbf{q}|^\tau\cdot\cos(\theta\cdot\tau);\quad f_\bullet=|\mathbf{q}|^\tau\cdot\sin(\theta\cdot\tau);$$
$$f^\circ_0=\tau\cdot|\mathbf{q}|^\tau\cdot\left[\frac{q_0\cdot q^\circ_0+q_\bullet\cdot q^\circ_\bullet}{\|\mathbf{q}\|}\cdot\cos(\theta\cdot\tau)+\frac{q_\bullet\cdot q^\circ_0-q_0\cdot q^\circ_\bullet}{\|\mathbf{q}\|}\cdot\sin(\theta\cdot\tau)\right]; \tag{9.83}$$
$$f^\circ_\bullet=\tau\cdot|\mathbf{q}|^\tau\cdot\left[\frac{q_0\cdot q^\circ_0+q_\bullet\cdot q^\circ_\bullet}{\|\mathbf{q}\|}\cdot\sin(\theta\cdot\tau)-\frac{q_\bullet\cdot q^\circ_0-q_0\cdot q^\circ_\bullet}{\|\mathbf{q}\|}\cdot\cos(\theta\cdot\tau)\right],$$

где τ – заданное действительное число; θ – поворот бикватерниона $\mathbf{Q}$, определяемый по формуле (9.82).

Синус:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}=\sin\mathbf{Q};\quad f_0=\sin q_0\cdot\operatorname{ch}q_\bullet;\quad f_\bullet=\cos q_0\cdot\operatorname{sh}q_\bullet;\\ f^\circ{}_0=q^\circ{}_0\cdot\cos q_0\cdot\operatorname{ch}q_\bullet+q^\circ{}_\bullet\cdot\sin q_0\cdot\operatorname{sh}q_\bullet;\quad f^\circ{}_\bullet=q^\circ{}_\bullet\cdot\cos q_0\cdot\operatorname{ch}q_\bullet-q^\circ{}_0\cdot\sin q_0\cdot\operatorname{sh}q_\bullet.\end{gathered}\tag{9.84}$$

Косинус:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}=\cos\mathbf{Q};\quad f_0=\cos q_0\cdot\operatorname{ch}q_\bullet;\quad f_\bullet=-\sin q_0\cdot\operatorname{sh}q_\bullet;\\ f^\circ{}_0=-q^\circ{}_0\cdot\sin q_0\cdot\operatorname{ch}q_\bullet+q^\circ{}_\bullet\cdot\cos q_0\cdot\operatorname{sh}q_\bullet;\ f^\circ{}_\bullet=-q^\circ{}_0\cdot\cos q_0\cdot\operatorname{sh}q_\bullet-q^\circ{}_\bullet\cdot\sin q_0\cdot\operatorname{ch}q_\bullet.\end{gathered}\tag{9.85}$$

Пример. Поэлементная запись для половинной экспоненты $\mathbf{F}=\mathbf{f}+\varpi\cdot\mathbf{f}^\circ=\exp\dfrac{\mathbf{Q}}{2}$.

$$\mathbf{f}=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\left[\cos\frac{q_\bullet}{2};\ e_1\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2};\ e_2\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2};\ e_3\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2}\right];\tag{9.86}$$

$$\mathbf{f}^\circ=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{q^\circ{}_0}{2}\cdot\cos\dfrac{q_\bullet}{2}-\dfrac{q^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\sin\dfrac{q_\bullet}{2}\\ e^\circ{}_1\cdot\sin\dfrac{q_\bullet}{2}+e_1\cdot\left(\dfrac{q^\circ{}_0}{2}\cdot\sin\dfrac{q_\bullet}{2}+\dfrac{q^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\cos\dfrac{q_\bullet}{2}\right)\\ e^\circ{}_2\cdot\sin\dfrac{q_\bullet}{2}+e_2\cdot\left(\dfrac{q^\circ{}_0}{2}\cdot\sin\dfrac{q_\bullet}{2}+\dfrac{q^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\cos\dfrac{q_\bullet}{2}\right)\\ e^\circ{}_3\cdot\sin\dfrac{q_\bullet}{2}+e_3\cdot\left(\dfrac{q^\circ{}_0}{2}\cdot\sin\dfrac{q_\bullet}{2}+\dfrac{q^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\cos\dfrac{q_\bullet}{2}\right)\end{bmatrix}.\tag{9.87}$$

Дополнительные данные. Модуль $|\mathbf{F}|$, аргумент arg$\mathbf{F}$, параметр бикватерниона $\lceil\mathbf{F}\rceil$, дуальный размер винтовой части бикватерниона $F_\bullet$ и ее параметр $\lceil\mathbf{F}\rceil_\bullet$ выражаются формулами:

$$\begin{gathered}|\mathbf{F}|=\exp\left(\frac{q_0}{2}+\varpi\cdot\frac{q^\circ{}_0}{2}\right)=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\left(1+\varpi\cdot\frac{q^\circ{}_0}{2}\right);\quad \arg\mathbf{F}=\frac{q_\bullet}{2}+\varpi\cdot\frac{q^\circ{}_\bullet}{2};\quad \lceil\mathbf{F}\rceil=\frac{q^\circ{}_0}{2};\\ F_\bullet=\exp\frac{q_0}{2}\cdot\sin\frac{q_\bullet}{2}\cdot\left[1+\varpi\cdot\left(\frac{q^\circ{}_0}{2}+\frac{q^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{q_\bullet}{2}\right)\right];\lceil\mathbf{F}\rceil_\bullet=\frac{q^\circ{}_0}{2}+\frac{q^\circ{}_\bullet}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{q_\bullet}{2}.\end{gathered}\tag{9.88}$$

Половинная экспонента от чисто винтового бикватерниона ($q_0 = 0$; $q^\circ{}_0 = 0$) – нормированный бикватернион ($|\mathbf{F}| = 1 + \varpi\cdot 0$).

Литература

1. Амелькин Н. И. Кинематика и динамика твердого тела (кватернионное изложение). [Электронный ресурс] / Н. И. Амелькин. − М., 2000. – 64 с. – Режим доступа: http://techlibrary.ru/bookpage.htm (27.05.2016). – Название с экрана.
2. Баженов В. А. Строительная механика. Компьютерные технологии и моделирование [Текст] / В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2014. – 912 с.
3. Байрак Л. Г. Интегральная формула Коши для кватернионов [Электронный ресурс] / Л. Г. Байрак. − 2010. – Режим доступа: http://scholium.narod.ru/Math/Scholium001.htm. (27.05.2016). – Название с экрана.
4. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна: учебное пособие для университетов [Текст] / В. Бляшке. – М.; Ленинград : Гостехиздат, 1935.
   Т. I. Элементарная дифференциальная геометрия. – М.; Ленинград, 1935. – 330 с.
5. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости [Текст] / В. В. Болотин. – М.: Физматлит, 1961. – 340 с.
6. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления [Текст] / В. Г. Болтянский / М.: Наука, 1969. – 408 с.
7. Борисов А. В. Динамика твердого тела [Текст] / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – М.; Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.– 384 с.
8. Бранец В. Н. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем [Текст] / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский – М.: Наука, 1992. – 280 с.
9. Бранец В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела [Текст] / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
10. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: учебник для ун-тов. В 2 ч. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки [Текст] / Н. Н. Бухгольц; в перераб. и с доп. С. М. Тарга. – 9-е изд., стер. – М., Наука, 1972. – 467 с.
11. Вебер Г. Энциклопедия элементарной математики : руководство для преподающих и изучающих элементарную математику [Текст] / Г. Вебер, проф. Ун-та в Страсбурге и Й. Вельштейн, проф. Ун-та в Страсбурге ; пер. с нем. под ред. и с примеч. В. Кагана, прив.-доц. Новорос. ун-та. – Одесса : Mathesis, 1906 – 1910. Т. 2. Энциклопедия элементарной геометрии. Книги 2 и 3. Тригонометрия, аналитическая геометрия, стереометрия / сост.: Г. М. Вебер, Й. Вельштейн, В. Якобсталь. – 1910. – 334 с.

12. Гамильтон У. Р. О кватернионах, или о новой системе мнимых величин в алгебре [Текст] / У. Р. Гамильтон // Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. – М. : Наука, 1994. – С. 345 – 391.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц [Текст] / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
14. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек [Текст] / А. Л. Гольденвейзер. – М. : Наука, 1976. – 512 с.
15. Гордон Е. И. Инфинитезимальный анализ [Текст] / Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе. – М. : Наука, 2011. – 400 с.
16. Готман А. Ш. Проектирование обводов судов с развертывающейся обшивкой [Текст] / А. Ш. Готман. – Ленинград : Судостроение, 1979. – 192 с.
17. Гуляев В. И. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней [Текст] / В. И. Гуляев, В. В. Гайдайчук, В. Л. Кошкин. – Киев: Наукова думка, 1992. – 344 с.
18. Диментберг Ф. М. Теория винтов и ее приложения [Текст] / Ф. М. Диментберг. – М. : Наука, 1978. – 328 с.
19. Диментберг Ф. М. Теория пространственных шарнирных механизмов [Текст] / Ф. М. Диментберг. – М. : Наука, 1982. – 336 с.
20. Ефремов А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. [Текст] / А. П. Ефремов // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2004. – № 1. – С. 111–127.
21. Жилин П. А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве [Текст] / П. А. Жилин. – Санкт-Петербург : Издательство СПбГТУ, 1992. – 86 с.
22. Жуковский Н. Е. Теоретическая механика [Текст] / Н. Е. Жуковский. – М. ; Ленинград : Гостехтеориздат, 1952. – 812 с.
23. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики [Текст] / В. Ф. Журавлев. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
24. Зуховицкий С. И. Линейное и выпуклое программирование [Текст] / С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
25. Илюхин А. А. О деформации упругой линии [Текст] / А. А. Илюхин // Механика твердого тела. – Киев, 1969. – Вып. 1. – С. 128–138.
26. Илюхин А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней [Текст] / А. А. Илюхин. – Киев : Наукова думка, 1979. – 216 с.
27. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория [Текст] / М. Интрилигатор. – М. : Прогресс, 1975. – 608 с.
28. Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции [Текст] / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 1987. – 319 с.
29. Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа [Текст] / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников –М. : Наука, 1973. – 144 с.
30. Каратаев Е. А. Кватернионы и 3-х мерные повороты. Практический подход [Текст] / Е. А. Каратаев. – М. : Апрель, 2000. – 32 с.

31. Каратаев Е. А. Преобразования гиперкомплексных чисел [Текст] / Е. А. Каратаев. – М. : Солон-пресс, 2016. – 300 с.
32. Конвей Дж. Х. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях [Текст] / Дж. Х. Конвей, Д. А. Смит. – М. : МЦНМО, 2009.– 184 с.
33. Корн Г. Справочник по математике для научных работнтков и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М., Наука, 1974. – 832 с.
34. Котельников А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике [Текст] / А. П. Котельников. – М. : КомКнига, 2006. – 224 с.
35. Крылов А. Н. Общая теория качки корабля на волнении, Избранные труды [Текст] / А. Н. Крылов. – М. : Изд. АН СССР, 1958. – С. 7–92.
36. Левин В. Е. Применение вектора поворота твердого тела в аппроксимации пространственной кривой [Текст] / В. Е. Левин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2001. – Т. 4, № 1. – С. 120–128.
37. Лорд Э. Э. Новая геометрия для новых материалов [Текст] / Э. Э. Лорд, А. Л. Маккей, С. М. Ранганатан; пер. с англ. канд. хим. наук Л. П. Мезенцевой; под ред. акад. В. Я. Шевченко и д-ра физ.-мат. наук В. Е. Дмитриенко. – М. : Физматлит, 2010. –263 с.
38. Лурье А. И. Аналитическая механика [Текст] / А. И. Лурье. – М. : Физматлит, 1961. – 824 с.
39. Людковский С. В. Некоммутативные квазиконформные интегральные преобразования над кватернионами и октонионами [Текст] / С. В. Людковский // Современная математика и ее приложения. – Тбилиси, 2008. – Том 52. – С. 3–54.
40. Молоденков А. В. Об определении ориентации твердого тела по его угловой скорости [Текст] / А. В. Молоденков // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2007. – №1 (21). – Выпуск 1. – С. 26–31.
41. Монж Г. Приложение анализа к геометрии [Текст] / Г. Монж ; пер. с фр. В. А. Гуковской; под ред. с предисл. и примеч. М. Я. Выгодского. – М. ; Ленинград ОНТИ. Гл. ред. общетехн. дисциплин, 1936. – 699 с.
42. Николаи Е. Л. К задаче об упругой линии двоякой кривизны [Текст] / Е. Л. Николаи // Труды по механике – М. : Гостехиздат, 1955. – С. 45–277.
43. Норель М. Вращения и кватернионы. Сборник рецептов [Электронный ресурс] / М. Норель. – Режим доступа: http://www.gamedev.ru/code/articles/?id=4215 (27.05.2016). − Название с экрана.
44. Орданович А. Е. Об аналитическом решении задачи о форме упругого тонкого стержня при сложном нагружении [Текст] / А. Е. Орданович // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Том 11, № 7. – С. 35–42.
45. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной ориентации [Текст] / А. П. Панов. – Киев : Наукова думка, 1995. – 279 с.
46. Перельмутер А. В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. Т. I. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, 2007. – 670 с. Т. II. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – 672 с. Т. III. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, 2011. – 400 с.

47. Побегайло А. П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике [Текст] / А. П. Побегайло. – Минск : БГУ, 2010. – 216 с.
48. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней [Текст] / Е. П. Попов. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
49. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии [Текст] / П. К. Рашевский– М. ; Ленинград : "Гостехтеориздат", 1950. – 428 с.
50. Роджерс Д. Математические основы машинной графики [Текст] / Д. Роджерс, Дж. Адамс – М. : Мир, 2001. – 604 с.
51. Рыжов Н. Н. Аппроксимация сложных поверхностей развертывающимися поверхностями [Текст] / Н. Н. Рыжов // Труды ВЗЭИ. – Москва, 1958. – Вып. 13.
52. Садбери Энтони. Кватернионный анализ [Текст] / Энтони Садбери // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2004. – № 2. – (Sudbery A. Quaternionic Analyses. Dep. of Math. University of York, Heslington. Aug. 1977).
53. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной [Текст] / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Физматлит, 2010. – 336 с.
54. Сотсков А. И. Оптимальное управление в примерах и задачах [Текст] / А. И. Сотсков., Г. В. Колесник – М., 2002. – 58 с.
55. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии [Текст] / С. Стернберг. – М. : Мир, 1970. – 412 с.
56. Уманский А. А. Статика и кинематика ферм [Текст] / А. А. Уманский. – М. : Гостехтеориздат, 1957. – 343 с.
57. Филин А. П. Элементы теории оболочек [Текст] / А. П. Филин – Ленинград : Стройиздат, 1975. – 256 с.
58. Филин А. П. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем [Текст] / А. П. Филин, О. Д. Тананайко, И. М. Чернева, М. А. Шварц. – Ленинград : Стройиздат, 1983. – 232 с.
59. Цисарж В. В. Математические методы компьютерной графики [Текст] / В. В. Цисарж, Р. И. Марусик. – Киев : Факт, 2004. – 464 с.
60. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения [Текст] / Ю. Н. Челноков. – М. : Физматлит, 2006. – 512 с.
61. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением [Текст] / Ю. Н. Челноков. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.
62. Челноков Ю. Н. Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела [Текст] / Ю. Н. Челноков // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44. – Вып. 1. – С. 32–39.
63. Челноков Ю. Н. Об одном винтовом методе описания движения твердого тела [Текст] / Ю. Н. Челноков // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. – М. : Высшая школа, 1981. – Вып. 11. – С. 129–138.

64. Чуб В. Ф. О возможности применения одной системы гиперкомплексных чисел в инерциальной навигации [Текст] / В. Ф. Чуб // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 3–23.
65. Чуб В. Ф. Основы инерциальной навигации [Текст] / В. Ф. Чуб. – М. : ЛЕНАНД, 2014. – 200 с.
66. Чуб В. Ф. Точные решения уравнений инерциальной навигации, связанные с геодезической прецессией [Текст] / В. Ф. Чуб // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – № 3. – С. 3–22.
67. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии [Текст] / И. М. Яглом. – М. : Физматлит, 1963. – 192 с.
68. Ball R. Treatise on the theory of screws [Electronic resource] / Sir Robert Stawell Ball. – Dublin, 1876. – 584 p. – Режим доступа: https://archive.org/stream/theoryscrews00ballrich/theoryscrews00ballrich_djvu.txt (27.05.2016). – Название с экрана.
69. Clifford W. Preliminary Scetch of Biquaternions [Text] / W. Clifford // Proc. of London Math. Soc. – 1873. – V. IV/ – P. 381–393.
70. Dam E. B. Quaternions [Text] / E. B. Dam, M. Koch, M. Lillholm // Technical Report DIKU-TR-98/5, Department of Computer Science. University of Copenhagen, Denmark. – July 17, 1998. – 98 p.
71. Fueter R. Uber die analytische Darstellung der regularen Funktionen einer Quaternionenvariablen [Text] / R. Fueter // Comment. Math. Helv. – 1936. – № 8 – P. 371–378.
72. Grassia F. S. Practical Parameterization of Rotations Using the Exponential Map [Text] / F. S. Grassia // The Journal of Graphics Tools. – 1998. – Vol. 3.3.
73. Joly C. J. A Manual of Quaternions [Text] / C. J. Joly – London : Macmillan and Co., Limited; New York : The Macmillan Company, 1905. – 320 p.
74. Salamin E. Application of quaternions to computation with rotations [Text] / E. Salamin // Technical report, Stanford Univ. – Stanford (CA), 1974.
75. Slavík A. Product integration, its history and applications [Text] / A. Slavík. – Prague : Matfyzpress, 2007. – 148 p.
76. Study E. Geometrie der Dynamen [Text] / E. Study. – Leipzig, 1901–1903.
77. Sweetser D. B. Doing Physics with Quaternions [Text] / D. B. Sweetser. – 2005. – 157 p.
78. Zwillinger, D. (Ed.). Spherical Geometry and Trigonometry [Text] / D. Zwillinger. – Boca Raton (FL) : CRC Press, 1995. – P. 468–471.

Научное издание

Гордеев Вадим Николаевич

Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике

Дизайн и верстка авторские.
Подписано в печать 10.06.2016 г. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 26,6. Тираж 300 экз.
Заказ № 150

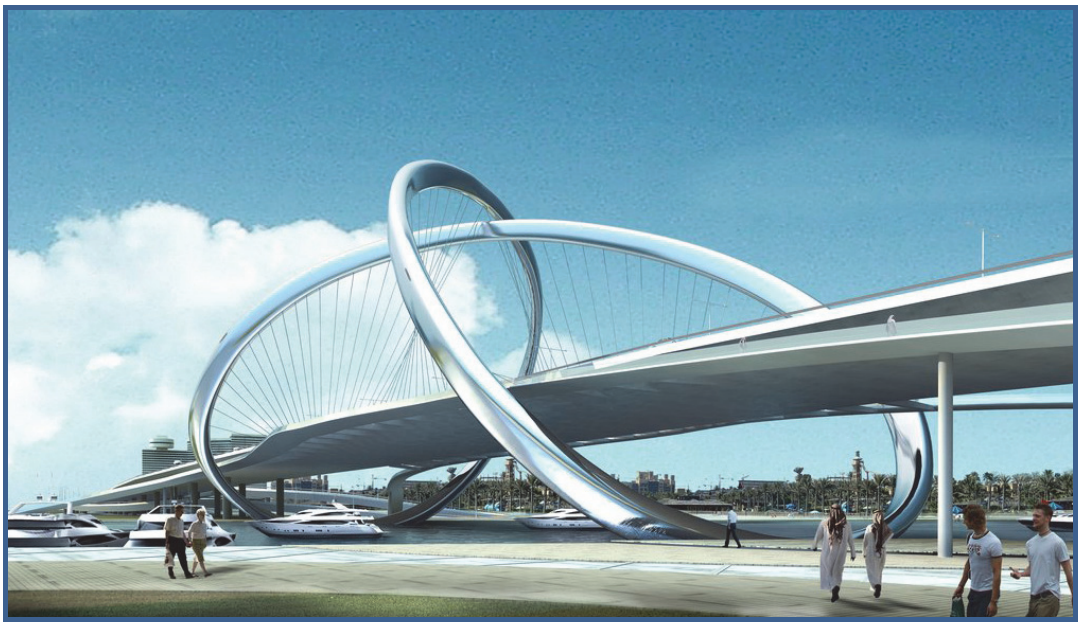
ООО "Издательство"Сталь"
Свидетельство ДК №4947 от 30. 07. 2015 р.
г. Киев, ул. Виталия Шимановского 2/1
тел./факс. 229-83-51, 516-45-02, 516-55-92
E-mail: tov_steel@ukr.net
www.izdat.com.ua

В. Н. Гордеев

КВАТЕРНИОНЫ И БИКВАТЕРНИОНЫ

с приложениями

В ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ



Издательство "СТАЛЬ"
Киев – 2016

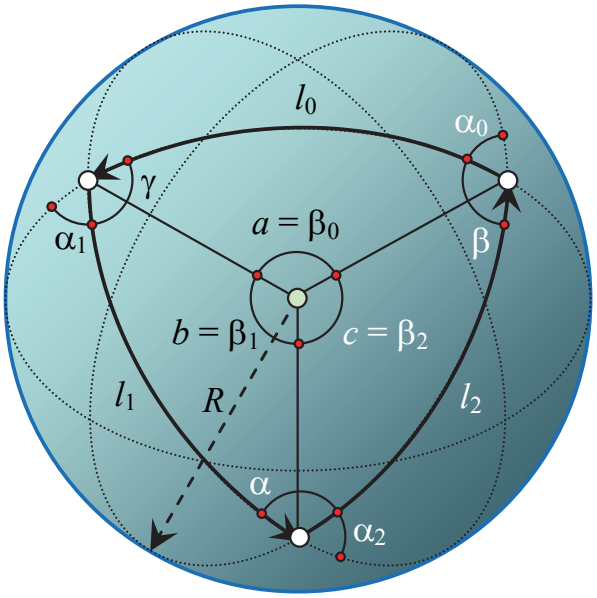
В. Н. Гордеев КВАТЕРНИОНЫ И БИКВАТЕРНИОНЫ



ГОРДЕЕВ Вадим Николаевич
доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники Украины.

Область научных интересов
Формообразование строительных конструкций.
Нелинейная строительная механика.

E-mail: gor@urdisc.com.ua



КВАТЕРНИОНЫ И БИКВАТЕРНИОНЫ

В. Н. Гордеев